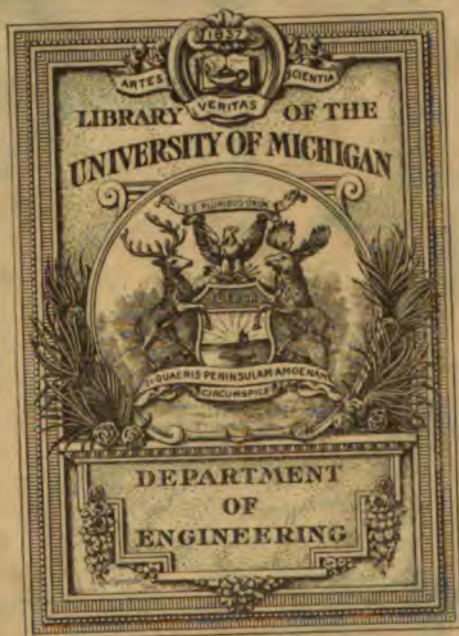



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



L'EFFET GYROSTATIQUE

ET SES APPLICATIONS

PAR

Ed.-W. BOGAERT

INGÉNIEUR DES CONSTRUCTIONS CIVILES
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE D'APPLICATION DU GÉNIE MARITIME DE FRANCE
INGÉNIEUR DE LA MARINE DE L'ÉTAT BELGE



BRUXELLES
RAMLOT Frères et Sœurs
Rue Grétry, 25

PARIS
Ch. BÉRANGER
15, rue des Saints-Pères, 15

1912

Extrait du *Bulletin technique de l'Association des Ingénieurs sortis de l'Ecole polytechnique de Bruxelles* (1912)

INTRODUCTION

L'effet gyrostatique — ou effet gyroscopique — est un aspect particulier des manifestations de l'inertie que présentent les solides animés d'une vitesse de rotation considérable; lorsqu'il se manifeste, la matière semble douée de propriétés différentes de celles qu'on lui reconnaît d'ordinaire et cela explique l'intérêt qu'ont toujours porté à l'étude de ce phénomène les philosophes et les mathématiciens.

Abordé par les géomètres, le problème devait être traité dans toute son ampleur, il en est résulté que l'effet gyrostatique, proprement dit, est à peine mentionné dans les traités classiques où il se trouve réduit au rang de cas particulier du mouvement d'un solide autour d'un point fixe. D'autre part, l'étude complète de cette dernière question révèle des difficultés analytiques très grandes, voire même insurmontables; peut-être ne faut-il pas chercher ailleurs l'origine de l'opinion assez répandue parmi les techniciens, suivant laquelle les phénomènes gyrostatiques sont difficiles à expliquer et ne peuvent être abordés que par une analyse élevée. Cela expliquerait, en même temps, que beaucoup d'entre eux connaissent très peu ce phénomène intéressant.

Aujourd'hui, cependant, les grandes vitesses de rotation sont devenues courantes dans l'industrie, et les ingénieurs se sont trouvés aux prises avec le phénomène gyrostatique. Plusieurs l'ont étudié, tantôt pour empêcher ses manifestations gênantes, tantôt pour l'utiliser dans des applications nouvelles.

Les cas où l'effet gyrostatique intervient dans la technique sont même devenus assez nombreux et il nous

a semblé qu'une étude systématique de ce phénomène, envisagé au point de vue de ses applications, ne manquerait pas d'opportunité.

Nous avons donc cherché à grouper en un ensemble aussi homogène que possible les questions, presque disparates, où intervient l'effet gyrostatique, en nous efforçant de montrer qu'elles peuvent être mises en équation et résolues avec une précision suffisante, par les méthodes courantes de la dynamique et les éléments du calcul infinitésimal.

Il faut évidemment, pour cela, quitter le domaine de la mécanique rationnelle pour entrer dans la voie des approximations qui caractérise la mécanique industrielle ; les résultats n'auront pas la précision de ceux que fourniraient des méthodes rigoureuses, qu'importe, si les solutions sont plus simples et si elles suffisent à guider sûrement les réalisations pratiques.

Les solutions approchées sont d'ailleurs inattaquables si l'on a soin de ne négliger que ce qui est réellement négligeable, ou de ne faire que des approximations dont on connaît la valeur. C'est la raison qui nous amènera plusieurs fois à comparer les résultats des formules approximatives à ceux que fournit l'analyse complète.

Pour faciliter ces rapprochements, nous avons rappelé dans un premier chapitre, les principaux théorèmes de dynamique qui régissent les mouvements de rotation des solides, en suivant une marche qui nous paraît conduire simplement et rapidement au but.

D'une manière générale, pour abréger l'exposé, nous avons eu recours à la représentation vectorielle, en réservant l'emploi des équations de projection sur trois axes aux applications particulières.

L'EFFET GYROSTATIQUE
ET
SES APPLICATIONS

CHAPITRE I

DYNAMIQUE DES MOUVEMENTS DE ROTATION

1. ROTATION. — MOUVEMENT CONTINU D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE. — MOUVEMENT CONTINU LE PLUS GÉNÉRAL D'UN SOLIDE. — La rotation est un déplacement caractérisé par le fait que, pendant le même temps, tous les points du solide tournent d'un même angle et dans le même sens autour d'une même droite appelée axe de rotation. Un mouvement de rotation est représenté à chaque instant par un vecteur OR dirigé suivant l'axe de rotation, dont la longueur est égale à la vitesse angulaire (en radians par seconde) et dont le sens est tel qu'en regardant dans la direction du vecteur, de l'origine O vers l'extrémité R, l'on voie la rotation du solide s'effectuer dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre (sens direct des astronomes, sens trigonométrique positif).

Le mouvement élémentaire le plus général d'un solide peut toujours se réduire à une translation et à une rotation. Si un point du solide est astreint à rester immobile, il ne peut y avoir de translation, et le mouvement se ramène à une rotation dont l'axe passe par le point fixe.

En général, le mouvement ne sera pas permanent et la rotation aura lieu autour d'un axe instantané qui, sans cesser

de passer par le point fixe, se déplacera dans le solide et dans l'espace. On peut imaginer un cône fixe engendré dans l'espace par les positions successives de l'axe instantané, et un cône invariablement lié au solide formé par les positions successives du même axe dans le solide. Ces deux cônes, dont le sommet est commun, seront à chaque instant en contact par une génératrice commune qui n'est autre que l'axe instantané de rotation, il s'ensuit que le cône lié au corps roule sans glisser sur le cône fixe. Telle est, sans doute, l'image la plus claire du mouvement continu d'un solide autour d'un point fixe.

On peut étendre les mêmes considérations au mouvement continu le plus général d'un solide. En effet, le mouvement élémentaire d'un solide pouvant se ramener à la coexistence d'une translation élémentaire d'un quelconque de ses points et d'une rotation autour d'un axe instantané passant par ce point, il suffit de considérer un même point pendant toute la durée du mouvement, pour dire que le mouvement continu d'un solide peut se définir par le roulement d'un cône lié au solide sur un cône animé d'un mouvement de translation dans l'espace.

2. Moments d'inertie. — Ellipsoïde d'inertie. — Le moment d'inertie d'un solide, par rapport à un axe, est la quantité

$$I = \Sigma mr^2,$$

r étant la distance à l'axe considéré de la masse élémentaire m, la somme s'étendant à tous les points du solide.

Supposons le solide rapporté à trois axes rectangulaires; l'expression du moment d'inertie, par rapport à une droite, passant par l'origine et dont les cosinus directeurs sont α, β, γ, est :

$$I = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - 2d\beta\gamma - 2e\alpha\gamma - 2f\alpha\beta \qquad (1)$$

a, b, c, sont les moments d'inertie du solide, par rapport aux trois axes rectangulaires, d, e, f, sont les produits d'inertie Σmyz, Σmzx, Σmxy.

Si l'on forme les moments d'inertie I par rapport à toutes les droites passant par un point donné O du solide, et si l'on porte à partir de ce point, sur chaque direction des longueurs

$$OP = \frac{1}{\sqrt{I}},$$

le lieu des points P constitue l'*ellipsoïde d'inertie* relatif au point O. L'équation de cet ellipsoïde s'obtient en faisant dans l'équation (1) :

$$\alpha = x\sqrt{I}, \quad \beta = y\sqrt{I}, \quad \gamma = z\sqrt{I}.$$

On obtient ainsi :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 2dyz - 2ezx - 2fxy = 1 \qquad (2)$$

Dans le cas particulier où les trois axes coordonnés coïncident avec les axes de l'ellipsoïde, son équation prend la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \qquad (3)$$

A, B, C, sont les moments d'inertie du solide par rapport aux axes de l'ellipsoïde qui sont appelés pour cette raison *directions principales d'inertie au point O.*

L'expression du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque peut alors s'exprimer simplement en fonction des trois moments d'inertie principaux :

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2. \qquad (4)$$

Propriétés principales :

a) L'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité est dit *ellipsoïde central d'inertie* et ses directions principales sont les *axes centraux*;

b) Le moment d'inertie d'un solide par rapport à une droite passant par le centre de gravité est plus petit que le moment d'inertie par rapport à une parallèle quelconque à cette droite. L'ellipsoïde central est par suite le plus grand des ellipsoïdes d'inertie relatifs aux différents points d'un solide;

c) Pour que l'un des axes coordonnés OZ, passant par un point O choisi comme origine des axes d'inertie soit

une direction principale, il faut que l'équation (2) de l'ellipsoïde ne contienne pas de terme du premier degré en z ; ce qui revient à dire que les produits d'inertie Σmxz et Σmyz s'annulent;

d) On démontre qu'un alignement quelconque, pris dans le solide ne sera généralement direction principale d'inertie qu'en un de ses points. Les axes centraux jouissent seuls de la propriété d'être direction principale d'inertie pour tous leurs points;

e) Si l'ellipsoïde central présente un axe de révolution, les ellipsoïdes relatifs à tous les points de cet axe seront également de révolution.

3. MOMENT DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT. — MOMENT CINÉTIQUE. — On appelle moment de la quantité de mouvement d'une masse élémentaire m_1, par rapport à un point O choisi comme origine, le produit de la quantité de mouvement vm_1 par la longueur de la perpendiculaire abaissée du point-origine sur le vecteur de la vitesse v de la masse élémentaire considérée.

En utilisant le langage de la géométrie vectorielle (*), on peut dire que le moment de la quantité de mouvement d'une

(*) Les principes du calcul des vecteurs sont résumés dans la plupart des traités de mécanique récents. Nous nous bornerons à rappeler les définitions suivantes qui précisent ce qu'il faut entendre par produit de deux vecteurs :

1° *Produit scalaire, — produit géométrique, — inner Produkt :* c'est la grandeur scalaire égale au produit des longueurs des deux vecteurs multipliés par le cosinus de l'angle compris.

En passant aux projections, si $x_1y_1z_1$ et $x_2y_2z_2$ sont les projections des deux vecteurs sur trois axes orthogonaux, on démontre que le produit scalaire a pour valeur $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

2° *Produit vectoriel, — moment géométrique, — äusser Produkt :* c'est un troisième vecteur numériquement égal à l'aire du parallélogramme construit sur les deux premiers, normal à la fois aux deux premiers et dirigé de façon qu'en regardant dans le sens du vecteur produit, l'extrémité du vecteur multiplicande paraisse entraîné suivant la direction du vecteur multiplicateur dans le sens des rotations positives. Dans l'écriture, nous distinguerons la multiplication vectorielle par le signe opératoire V placé devant les deux vecteurs.

D'après la définition du signe à attribuer au produit vectoriel, ce dernier n'est pas indépendant de l'ordre des facteurs et l'on a $V\overline{ab} = - V\overline{ab}$.

masse élémentaire par rapport à un point-origine, est égal au produit vectoriel du vecteur de position OA par le vecteur AB représentant la quantité de mouvement. Ce produit vectoriel se représente par un vecteur-aire OM égal à l'aire du parallélogramme OABC, normal au plan de ce parallélogramme et dirigé de telle façon qu'en plaçant l'œil en O et en regardant dans la direction OM, l'extrémité A du vecteur OA semble entraînée suivant AB dans le sens des rotations positives (fig. 1.).

On appelle moment résultant des quantités de mouve-

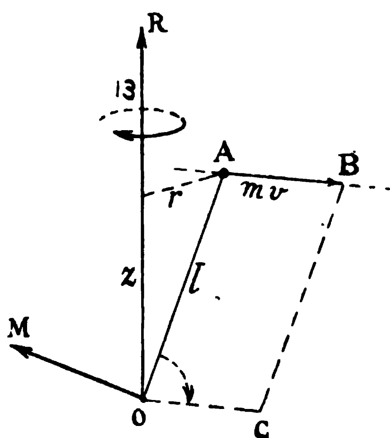


Figure 1.

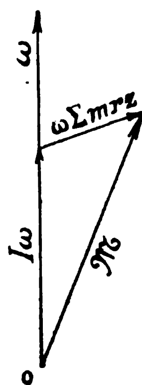


Figure 2.

ment d'un solide par rapport à un point-origine, la somme géométrique, ou résultante, des moments des quantités de mouvement de toutes les masses élémentaires du solide; ce moment résultant se représente par un vecteur unique. Pour éviter la périphrase « moment résultant des quantités du mouvement », on peut se servir de l'une des expressions *moment angulaire*, *couple acquis* ou *moment cinétique*, nous adopterons dans la suite cette dernière dénomination (*).

(*) Cette fonction importante, appelée par les auteurs anglais : *moment of momentum*, est désignée dans les ouvrages allemands récents sous les noms de *impuls-vektor* ou de *drall*.

Dans le cas d'un solide ayant un point fixe, ce point sera choisi comme point-origine par rapport auquel on évaluera les moments des forces extérieures, des vitesses, etc., ainsi que le moment cinétique que nous désignerons par $\overline{\mathfrak{M}}$ et qui sera défini par

$$\overline{\mathfrak{M}} = \Sigma m \, \mathrm{V} \, \overline{l} \overline{v} \, .$$

Nous savons d'autre part que le mouvement du solide se réduit à une rotation instantanée définie par un vecteur $\overline{\omega}$ passant par le point fixe.

Démontrons qu'en général les vecteurs $\overline{\mathfrak{M}}$ et $\overline{\omega}$ ne sont pas confondus en direction.

Appelons $\overline{v}$ la vitesse instantanée de la masse élémentaire dont la position est définie par rapport au vecteur $\overline{\omega}$ par le vecteur $\overline{l}$; en se reportant aux notations de la figure 1 on peut écrire :

$$\overline{l} = \overline{r} + \overline{z} \, ,$$

et de là :

$$\overline{\mathfrak{M}} = \Sigma m \, \mathrm{V} \, \overline{r} \overline{v} + \Sigma m \, \mathrm{V} \, \overline{z} \overline{v} \, . \qquad (5)$$

Le vecteur du moment cinétique peut donc être considéré comme étant la somme des deux vecteurs suivants (fig. 2) :

1°) Un vecteur dirigé suivant l'axe instantané de rotation, dont la longueur peut être exprimée algébriquement par $\mathrm{I}\omega$, I étant le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe instantané. En effet r et v sont perpendiculaires l'une sur l'autre et $v = r\omega$, par suite, la longueur du vecteur n'est autre que $\Sigma mrv = (\Sigma mr^2)\,\omega = \mathrm{I}\omega$;

2°) Un vecteur normal à la direction de l'axe instantané de rotation, dont la longueur peut être exprimée algébriquement par $\Sigma m \, . \, zv = \omega \Sigma mzr$; ce vecteur n'est nul que dans des cas particuliers. Par exemple $\Sigma mzr = 0$ si l'axe instantané de rotation contient les centres de gravité de toutes les sections faites dans le solide normalement à sa direction. D'une manière plus générale, imaginons trois axes orthogonaux OXYZ, l'axe OZ étant dirigé suivant

l'axe instantané, on pourra écrire $\overline{r} = \overline{x} + \overline{y}$ et le produit Σmzr sera nul si l'on a à la fois $\Sigma mzx = \Sigma mzy = 0$, c'est-à-dire si l'axe instantané est dirigé suivant une direction principale d'inertie au point O.

Propriétés principales :

a) Le moment cinétique n'est pas confondu en direction avec l'axe instantané de rotation (fig. 2). Pour que ces deux directions coïncident elles doivent être confondues en même temps avec une direction principale d'inertie au point fixe.

b) Etant donnée la nature vectorielle du moment cinétique au point O, il peut être considéré comme la résultante des moments des quantités de mouvement par rapport à trois axes orthogonaux issus du point O.

Si les trois axes choisis sont les trois directions principales au point O, et si A, B, C, sont les moments d'inertie correspondants, $\overline{\omega_x}$, $\overline{\omega_y}$, $\overline{\omega_z}$ les projections de $\overline{\omega}$ sur ces trois axes on aura la relation vectorielle :

$$\overline{\mathfrak{M}} = A\overline{\omega_x} + B\overline{\omega_y} + C\overline{\omega_z} \,. \qquad (6)$$

d'où l'on déduit la relation algébrique

$$\mathfrak{M}^2 = A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 \,. \qquad (7)$$

c) On sait que le moment résultant d'un système de vecteurs (forces, masses, quantités de mouvement, etc.) par rapport à une droite est égal à la projection sur cette droite du moment résultant du système de vecteurs considéré par rapport à un point quelconque de cette droite. En particulier, dans le cas d'un solide mobile autour d'un point fixe, la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à une droite quelconque passant par le point fixe sera égale à la projection du moment cinétique sur cette droite.

On déduit immédiatement de là que c'est par rapport à la direction du vecteur du moment cinétique que la somme des moments des quantités de mouvement est maximum.

Le plan du moment cinétique, normal au vecteur $\overline{\mathfrak{M}}$, jouit par suite de la propriété suivante : la somme des pro-

duits des masses élémentaires du solide par les aires balayées par les droites qui joignent ces masses au point fixe pendant un temps élémentaire est plus grande, en projection sur ce plan, qu'en projection sur tout autre plan ; de là l'expression « plan du maximum des aires » pour désigner le plan du moment cinétique.

d) On peut donner une représentation précise des positions relatives des vecteurs de la rotation instantanée et du moment cinétique en les considérant comme deux diamètres de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe. L'équation de l'ellipsoïde rapportée à ses axes étant

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \, . \qquad (3)$$

Le vecteur de la rotation instantanée percera cet ellipsoïde à une distance $\frac{1}{\sqrt{I}}$ du point fixe et les coordonnées du point de percée seront

$$\frac{1}{\sqrt{I}} \cdot \frac{\omega_x}{\omega} \qquad \frac{1}{\sqrt{I}} \cdot \frac{\omega_y}{\omega} \qquad \frac{1}{\sqrt{I}} \cdot \frac{\omega_z}{\omega} \, .$$

Le plan tangent en ce point aura pour équation :

$$Ax\omega_x + By\omega_y + Cz\omega_z = \omega\sqrt{I}$$

Ce plan est normal au vecteur du moment cinétique dont les cosinus directeurs sont précisément proportionnels à :

$$A\omega_x \qquad B\omega_y \qquad C\omega_z \, .$$

D'où l'on conclut cette proposition très importante : *dans le mouvement d'un solide autour d'un point fixe l'axe instantané de rotation est conjugué au plan du moment cinétique* (théorème du plan diamétral conjugué).

e) Le théorème des quantités de mouvement étendu aux moments conduit à l'énoncé suivant : l'accroissement du moment cinétique pendant un temps élémentaire est égal à l'impulsion élémentaire du couple résultant des forces extérieures par rapport au point fixe considéré.

Cette proposition peut s'exprimer par :

$$\overline{d\mathfrak{M}} = \overline{C}dt \qquad \text{ou} \qquad \frac{\overline{d\mathfrak{M}}}{dt} = \overline{C} \, . \qquad (8)$$

s'il s'agit d'un couple à action continue, et par

$$\overline{\Delta \mathfrak{M}} = |\, \overline{C} dt \,| \tag{8'}$$

lorsqu'il s'agit d'un couple de percussion dont l'impulsion est représentée par $|Cdt|$.

On peut donner de cette proposition l'énoncé suivant qui rappelle celui de Résal : *La vitesse de l'extrémité du vecteur du moment cinétique par rapport à un point fixe est équipollente au couple résultant des forces extérieures par rapport au même point* (fig. 3).

f) Si le moment résultant des forces extérieures par

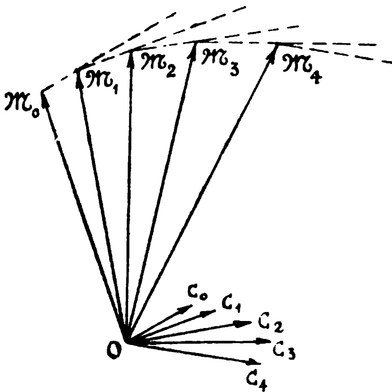


Figure 3.

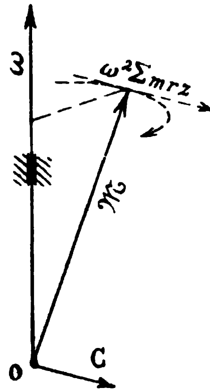


Figure 4.

rapport au point fixe est nul, le moment cinétique reste constant en grandeur et en direction, si de plus l'axe de rotation est direction principale d'inertie en ce point, le vecteur du moment cinétique sera confondu avec lui et le solide continuera à tourner indéfiniment autour du même axe qui restera fixe dans l'espace.

Réciproquement, un solide ayant un point fixe peut tourner d'une manière permanente autour d'une direction principale en ce point sans qu'aucune force extérieure intervienne. (Axes permanents de rotation.)

g) Si au contraire l'on veut astreindre un solide à tourner d'une manière permanente autour d'une droite donnée

passant par le point fixe — par exemple en le munissant d'un axe guidé dans des paliers — il faudra que des forces extérieures interviennent. L'axe imposé étant à chaque instant axe de rotation, nous pouvons former d'après la relation (5) le vecteur $\mathfrak{M}$ correspondant (fig. 4). Ce vecteur conservera une position invariable par rapport aux points du solide et participera avec eux au mouvement de rotation général autour de l'axe fixe ; en se reportant aux notations des figures 2 et 4 on a pour la vitesse $\overline{w}$ de l'extrémité du vecteur $\overline{\mathfrak{M}}$:

$$\overline{w} = \mathrm{V}\, \overline{\omega \mathfrak{M}} .$$

Cette vitesse est équipollente au couple des forces extérieures qui doit être exercé sur le solide, d'où l'expression de ce couple :

$$\overline{\mathrm{C}} = \mathrm{V}\, \overline{\omega \mathfrak{M}} . \tag{9}$$

C'est un couple dont le plan est tournant en même temps que le corps, on voit immédiatement que la grandeur numérique de ce couple est exprimée par $\mathrm{C} = \omega^2\, \Sigma\, mrz$.

Réciproquement, si un solide tourne autour d'un axe quelconque, il exercera sur ses appuis un couple de réaction tournant, égal et contraire au précédent.

$$\overline{\mathrm{C}'} = -\overline{\mathrm{C}} = \mathrm{V}\, \overline{\mathfrak{M}}\, \overline{\omega}$$

Dans les réalisations matérielles, ce couple doit être neutralisé par les pressions des paliers sur l'axe ; c'est lui qui accentue l'usure des coussinets dans les machines comportant des organes qui ne sont pas dynamiquement équilibrés ; c'est-à-dire qui ne tournent pas autour d'un axe permanent ou d'un axe qui soit principal d'inertie au moins pour un des paliers.

4. Force vive. — Energie cinétique. — On appelle force vive d'un point matériel, le produit mv^2 de sa masse par le carré de sa vitesse ; et force vive totale d'un système la somme des forces vives des points qui le composent.

Si le mouvement se réduit à une rotation, la force vive totale peut être exprimée par

$$\mathcal{T} = \mathrm{I}\, \omega^2 \tag{10}$$

ω étant la vitesse angulaire et I le moment d'inertie par rapport à l'axe instantané de rotation.

Si la vitesse ω est définie par ses composantes ω_x ω_y ω_z autour des trois axes d'inertie principaux on peut donner à l'expression (10) une forme plus pratique en remplaçant I par sa valeur donnée par la relation (4), on trouve ainsi

$$\mathcal{C} = A\alpha^2\omega^2 + B\beta^2\omega^2 + C\gamma^2\omega^2 .$$

En remarquant que ω_x ω_y ω_z sont précisément les produits de ω par les trois cosinus directeurs α β γ, on obtient

$$\mathcal{C} = A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 . \qquad (11)$$

Dans le cas du mouvement le plus général d'un solide, translation d'un point du système superposée à une rotation autour d'un axe passant par ce point, on peut exprimer la force vive en fonction des deux vitesses de translation et de rotation. L'expression assez compliquée se simplifie si le point-origine choisi est le centre de gravité, dans ce cas en effet on peut écrire

$$v^2\Sigma m + I\omega^2$$

ce qui exprime que la force vive totale est égale à la force vive de la masse totale supposée concentrée au centre de gravité plus la force vive de rotation autour de ce centre considéré comme fixe.

Remarque : La force vive est une quantité essentiellement positive, à laquelle ne s'attache aucune idée de direction ni de sens, elle n'est pas susceptible de représentation vectorielle.

Propriétés principales :

a) La variation de la force vive totale d'un système pendant un intervalle de temps donné est égal au double du travail de toutes les forces (extérieures et intérieures) appliquées au système pendant cet intervalle de temps, (*théorème des forces vives*).

$$\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_o = \Sigma m(v_1^2 - v_o^2) = 2\int_{t=o}^{t=1} F\frac{ds}{dt}dt$$

b) La demi force vive totale d'un système à un instant quelconque est égale à la somme des travaux de toutes les forces appliquées à ce système depuis qu'il a quitté l'état de repos absolu ; cette quantité est l'*énergie cinétique* du système.

$$\frac{1}{2}\mathcal{E} = \frac{1}{2}\Sigma mv^2$$

c) Dans le cas d'un mouvement de rotation, la force vive, $I\omega^2$ est égale au produit scalaire du moment cinétique $\mathcal{M}$ par la vitesse instantanée de rotation. En effet, $I\omega$ est la composante du moment cinétique suivant l'axe instantané de rotation, en d'autres termes c'est la projection de $\mathcal{M}$ sur le vecteur-rotation, et $I\omega \, . \, \omega$ n'est autre que le produit scalaire de $\mathcal{M}$ par ω, nous pouvons donc écrire

$$\mathcal{E} = \overline{\mathcal{M}} \, . \, \overline{\omega} \qquad (12)$$

en ne perdant pas de vue qu'il s'agit d'un produit scalaire, on peut écrire algébriquement

$$\mathcal{E} = \mathcal{M} \, , \, \omega \, . \, \cos \widehat{\mathcal{M}\omega} \qquad (12')$$

5. Moment centrifuge. — Lorsqu'un solide tourne autour d'un axe quelconque, chaque élément de masse m_1 est soumis à une réaction d'inertie centrifuge normale à l'axe de rotation et égale à $m_1\omega^2 r$, les réactions d'inertie de l'espèce appliquées à toutes les masses élémentaires du système peuvent se réduire, comme tout système de vecteurs ou de forces, à une résultante et à un couple qui seront neutralisés à chaque instant par la rigidité de l'axe et la fixité des appuis.

Si le solide est mobile autour d'un point fixe, la résultante passera par ce point et sera, à chaque instant, équilibrée par la résistance de l'appui. Quant au couple, on peut le considérer comme la somme géométrique des moments des réactions centrifuges élémentaires par rapport au point fixe, nous l'appellerons *moment centrifuge* et le désignerons par M_c.

La réaction d'inertie centrifuge élémentaire $m\omega^2 r$ peut

être représentée par un vecteur parallèle à $\bar{r}$, ω^2 étant considéré comme un facteur sans direction, le moment de cette réaction élémentaire par rapport au point o sera

$$\overline{m_c} = \omega^2 m \mathrm{V} \bar{z} \bar{r}$$

et par suite

$$\overline{\mathrm{M}_c} = \omega^2 \Sigma m \mathrm{V} \bar{z} \bar{r}$$

M_c, d'après cette égalité, est un vecteur perpendiculaire au vecteur $\Sigma m \mathrm{V} \bar{z} \bar{v}$ et, en même temps, perpendiculaire à $\bar{z}$, c'est-à-dire à $\bar{\omega}$; $\overline{\mathrm{M}_c}$ est donc normal à la fois à $\overline{\mathfrak{M}}$ et à $\bar{\omega}$, de plus, sa longueur peut être exprimée algébriquement par $\omega \,.\, \omega \Sigma m z r$, ce qui est égal à l'aire du rectangle construit sur $\omega \Sigma m z r$ et ω, comme la première de ces deux longueurs n'est autre que la projection de $\overline{\mathfrak{M}}$ sur une normale à $\bar{\omega}$, on peut dire que $\overline{\mathrm{M}_c}$ ne diffère pas du produit vectoriel de $\overline{\mathfrak{M}}$ par $\bar{\omega}$ et l'on peut écrire :

$$\overline{\mathrm{M}_c} = \mathrm{V} \overline{\mathfrak{M}} \bar{\omega} \qquad (12)$$

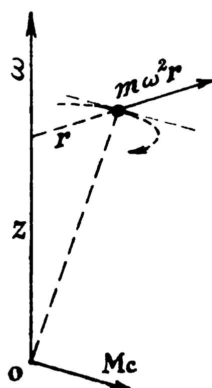


Figure 5.

Propriétés principales :

a) Le moment centrifuge d'un solide mobile autour d'un point fixe est égal au produit vectoriel du moment cinétique par la vitesse angulaire ;

b) Si le solide tourne autour d'une direction principale d'inertie, $\bar{\omega}$ et $\overline{\mathfrak{M}}$ sont confondus en direction, leur produit vectoriel et par suite M_c est nul. Les réactions d'inertie se font rigoureusement équilibre ;

c) Si l'on veut faire tourner un solide autour d'un axe qui n'est principal en aucun de ses points, le mouvement ne pourra se maintenir que si l'on exerce à chaque instant, sous forme de pressions sur l'axe, un moment tournant C défini par :

$$\bar{\mathrm{C}} = -\overline{\mathrm{M}_c} = \mathrm{V} \bar{\omega} \overline{\mathfrak{M}}$$

et algébriquement égal à $\omega^2 \Sigma m z r$.

Nous retrouvons ici par la considération du moment centrifuge le résultat obtenu par une voie toute différente au n° 3, *g*.

6. Equations générales du mouvement d'un solide autour d'un point fixe. — Les forces qui sollicitent le solide pourront toujours se résoudre en une résultante passant par le point fixe, sans effet sur le mouvement que nous étudions, et un couple $\overline{C}$ par rapport au point fixe.

D'autre part, à l'instant où nous commençons à le considérer, le solide possède, en vertu d'actions antérieures, un certain moment cinétique $\overline{\mathfrak{M}}$.

Le couple $\overline{C}$ aura pour effet de modifier continuellement le vecteur $\overline{\mathfrak{M}}$ en grandeur et en direction suivant la relation connue (n° 3) :

$$\frac{\overline{d\mathfrak{M}}}{dt} = \overline{C}. \tag{8}$$

On se souviendra que les grandeurs $\frac{\overline{d\mathfrak{M}}}{dt}$ et $\overline{C}$ de cette équation sont rapportées à l'espace fixe.

Le mouvement du solide est entièrement défini si l'on connaît, à chaque instant, la grandeur du vecteur $\overline{\omega}$ de sa rotation instantanée et la position de ce vecteur dans le solide et dans l'espace (voir n° 1).

La vitesse absolue $\frac{\overline{d\mathfrak{M}}}{dt}$ de l'extrémité du vecteur $\overline{\mathfrak{M}}$ peut être décomposée en deux parties : d'une part, sa vitesse relative par rapport au solide que nous représenterons par $\frac{d\mathfrak{M}_r}{dt}$, et, d'autre part, une vitesse d'entraînement qui n'est autre que le trajet effectué, par unité de temps, par la pointe du vecteur $\overline{\mathfrak{M}}$ supposé entraîné avec le solide dans la rotation $\overline{\omega}$ de celui-ci.

Cette vitesse d'entraînement s'obtient en formant le produit de la vitesse angulaire ω par la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de $\mathfrak{M}$ sur l'axe

instantané, soit, en d'autres termes, le produit vectoriel de $\bar{\omega}$ par $\overline{\mathfrak{M}}$.

L'équation (8) devient, dès lors :

$$\frac{\overline{d\mathfrak{M}_r}}{dt} + \mathrm{V}\,\bar{\omega}\overline{\mathfrak{M}} = \bar{\mathrm{C}} \ . \qquad (14)$$

Telle est l'équation différentielle, sous forme vectorielle, qui définit, à chaque instant, la grandeur et la direction du vecteur ω en fonction du couple extérieur.

Pour passer aux applications, il faut recourir aux équations de projection sur trois axes.

Choisissons un système d'axes orthogonaux $Oxyz$ ayant son origine au point fixe et invariablement lié au solide.

Appelons $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$; ω_x, ω_y, ω_z; C_x, C_y, C_z, les projections de $\overline{\mathfrak{M}}$, $\bar{\omega}$, et $\bar{C}$ sur ces trois axes mobiles.

L'équation vectorielle (14) donne naissance aux trois équations de projection

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mathfrak{M}_x}{dt} - \mathfrak{M}_y\omega_z + \mathfrak{M}_z\omega_y = C_x \ , \\ &\frac{d\mathfrak{M}_y}{dt} - \mathfrak{M}_z\omega_x + \mathfrak{M}_x\omega_z = C_y \ , \\ &\frac{d\mathfrak{M}_z}{dt} - \mathfrak{M}_x\omega_y + \mathfrak{M}_y\omega_x = C_z \ . \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Si les axes $oxyz$ invariablement liés au corps sont choisis coïncidant avec les directions principales d'inertie au point fixe, nous savons que l'on aura $\mathfrak{M}_x = A\omega_x$, $\mathfrak{M}_y = B\omega_y$, $\mathfrak{M}_z = C\omega_z$ d'où

$$A\frac{d\omega_x}{dt} - (B - C)\,\omega_y\omega_z = C_x \qquad (16)$$

$$B\frac{d\omega_y}{dt} - (C - A)\,\omega_z\omega_x = C_y \qquad (17)$$

$$C\frac{d\omega_z}{dt} - (A - B)\,\omega_x\omega_y = C_z \qquad (18)$$

Ce sont les équations d'Euler; elles ont un caractère un peu moins général que l'équation (14) ou les équations (15) dont elles ont été déduites. Les équations d'Euler fournissent à chaque instant les variations des rotations ω_x, ω_y, ω_z autour des axes principaux en fonction des projections du couple des forces extérieures sur ces mêmes axes.

Pour exprimer la loi du mouvement du solide, il faut leur adjoindre des relations cinématiques exprimant les rotations ω_x, ω_y, ω_z en fonction de la position occupée par le trièdre mobile *oxyz* par rapport à un trièdre de référence fixe. On utilise à cette fin les formules d'Olinde Rodrigue ou les angles d'Euler φ, ψ, θ et leurs dérivées par rapport au temps (*).

On se trouve finalement conduit à un système de six équations (16) à (21) différentielles du premier ordre entre les inconnues ω_x, ω_y, ω_z, φ, ψ, θ, et le temps. L'intégration est en général impossible parce que C_x, C_y, C_z, projections du couple des forces extérieures sur les axes mobiles, sont elles-mêmes des fonctions de $\varphi, \psi, \theta, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$.

L'intégration n'a pu être faite que dans trois cas particuliers, et même alors, elle donne lieu à des solutions trop compliquées pour pouvoir être introduites dans la mécanique appliquée.

Sans nous appesantir davantage sur cette question (**),

(*) On trouve la définition des trois angles d'Euler dans tous les traités classiques de mécanique, ainsi que la démonstration des trois formules suivantes :

$$\omega_x = \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi + \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi. \tag{19}$$

$$\omega_y = \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi. \tag{20}$$

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta. \tag{21}$$

(**) La bibliographie, à la fin de cette étude, donne l'indication des principaux mémoires dans lesquels la théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe a été établie et successivement perfectionnée.

On trouvera un admirable exposé de l'ensemble de la question dans le *Traité de Mécanique rationnelle* de M. Appell (tome II, ch. XX), où sont également signalés les travaux d'analyse qui se rapportent à ce problème important.

rappelons que les deux cas principaux où une solution rigoureuse a été donnée sont les suivants :

Premier cas. — $C_x = C_y = C_z = 0$ les forces extérieures sont nulles, se font équilibre ou donnent lieu à une résultante unique passant par le point fixe; c'est le cas dit de la rotation naturelle qui sera traité plus loin (n° 7).

Deuxième cas. — L'ellipsoïde d'inertie du solide au point fixe est de révolution et de plus les forces extérieures se réduisent à une force unique de direction constante et appliquée en un point de l'axe de résolution. C'est le cas de la toupie idéale qui interviendra au chapitre III, paragraphe I.

7. Rotation naturelle. — Le cas où les couples C_x, C_y, C_z sont nuls se rencontre notamment pour un solide pesant, suspendu par son centre de gravité mis en mouvement par une cause quelconque, lorsque, l'action extérieure ayant cessé le mouvement se continue comme une conséquence de la seule loi de l'inertie. Ce serait aussi le cas du mouvement autour de son centre de gravité, d'un projectile lancé dans le vide.

On peut obtenir la loi du mouvement par une voie purement analytique (*) grâce à la simplification des équations

---

(*) Voici la marche suivie dans cette méthode. On part des équations d'Euler (16) (17) (18) dont les seconds membres sont nuls $C_x = C_y = C_z = 0$; on en obtient aisément deux intégrales.

En multipliant les trois équations respectivement par ω_x, ω_y et ω_z, et en additionnant, une intégration immédiate donne

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = \mathfrak{T}_0 \qquad (22)$$

En opérant de même après multiplication par $A\omega_x$, $B\omega_y$ et $C\omega_z$, on obtient

$$A\omega_x^2 \times B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = \mathfrak{M}_0^2 \qquad (23)$$

$\mathfrak{T}_0$ et $\mathfrak{M}_0$ sont deux constantes dont la signification se déduit directement des définitions rappelées aux n°s 3 et 4, équations (7) et (11). Ces deux équations expriment, en effet, qu'en l'absence de force extérieure, la force vive comme le moment cinétique du système restent constants. Ici comme dans beaucoup de problèmes de mécanique, l'application des thorèmes généraux de la force vive et du moment cinétique aurait permis d'écrire directement deux intégrales.

d'Euler, mais la solution, bien que complète, est loin de définir le mouvement d'une manière aussi frappante que la méthode géométrique de Poinsot (*5*), dont la représentation vectorielle permet un exposé très rapide :

Comme il n'y a aucune force extérieure appliquée, la force vive $\mathcal{T}$ sera constante et le vecteur $\overline{\mathfrak{M}}$ du moment cinétique restera constant en grandeur et direction :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 , \qquad \overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}_0} . \qquad (22 \text{ et } 23)$$

Nous savons par le théorème du plan diamétral conjugué (n° 3, *d*) que la direction de l'axe instantané de rotation sera à chaque instant conjuguée à la direction du plan du moment cinétique normal à $\overline{\mathfrak{M}_0}$, si donc nous considérons le point R′ où le vecteur $\bar{\omega}$ perce l'ellipsoïde d'inertie, le plan tangent à l'ellipsoïde en ce point sera à chaque instant normal à $\overline{\mathfrak{M}}$ (fig. 6).

D'autre part, nous avons vu (n° 4, *e*) que $\mathcal{T}$ est égal au produit scalaire des vecteurs $\overline{\mathfrak{M}}$ et $\overline{\Omega}$, c'est-à-dire au produit des grandeurs de ces vecteurs par le cosinus de l'angle qu'ils font entre eux, nous déduisons de là :

$$\omega \,.\, \cos \widehat{\omega \mathfrak{M}} = \frac{\mathcal{T}_0}{\mathfrak{M}_0} . \qquad (24)$$

Aux deux intégrales (22) et (23), joignons l'une des équations d'Euler, l'équation (18), par exemple :

En éliminant ω_x et ω_y entre ces trois équations, en tirant par exemple des deux premières

$$\omega_x^2 = f_1(\omega_z^2) \quad \text{et} \quad \omega_y^2 = f_2(\omega_z^2)$$

On trouve en introduisant ces valeurs dans (18) :

$$dt = \frac{C\, d\omega_z}{(B-A) \sqrt{f_1(\omega_z^2) \,.\, f_2(\omega_z^2)}}$$

On se trouve en présence d'une intégrale elliptique qui conduit pour ω_z à une fonction doublement périodique du temps ; en introduisant cette fonction dans les expressions de ω_x et de ω_y, on trouve également pour ces deux quantités des fonctions doublement périodiques de t.

Enfin, en utilisant les relations cinématiques (19) (20) (21) du n° 6, on arrive par des quadratures à exprimer les trois angles d'Euler en fonction du temps.

Cela revient à dire, puisque $\mathcal{C}_0$ et $\overline{\mathfrak{M}_0}$ sont constants, que l'extrémité du vecteur rotation ne sort pas d'un plan p normal à $\mathfrak{M}$ et situé à une distance du point fixe égale à : $OM = \frac{\mathcal{C}_0}{\mathfrak{M}_0}$.

Les deux triangles semblables OMR et OM'R' nous

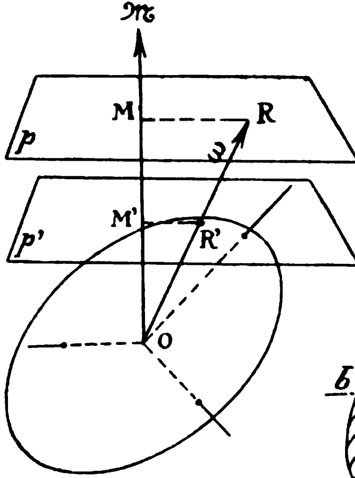


Figure 6.

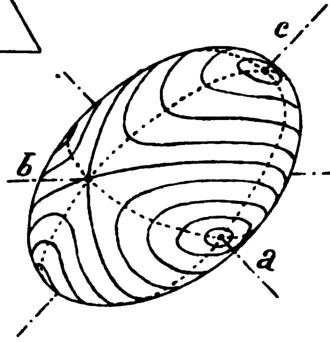


Figure 7.

permettent d'exprimer la distance au point fixe du plan tangent en R' :

$$OM' = \frac{\mathcal{C}_0}{\mathfrak{M}_0} \cdot \frac{1}{\omega\sqrt{I}},$$

et en remarquant qu'à chaque instant $I\omega^2 = \mathcal{C} = \mathcal{C}_0$, on aura :

$$OM' = \frac{\sqrt{\mathcal{C}_0}}{\mathfrak{M}_0}. \qquad (25)$$

Cette distance est constante. Le plan tangent p' est donc invariable comme le plan p et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Le solide abandonné à son inertie se meut de telle sorte que son ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe ne cesse

d'être tangent à un plan invariable. Le rayon vecteur du point de contact donne la position de l'axe instantané et sa longueur est proportionnelle à la vitesse instantanée de rotation.

On pourrait aussi donner l'énoncé suivant :

L'extrémité du vecteur rotation se trouve à chaque instant au point de contact d'un ellipsoïde homothétique à l'ellipsoïde d'inertie (le rapport d'homothétie étant $\sqrt{\mathcal{E}_0}$), et d'un plan invariable normal au vecteur du moment cinétique, situé à une distance du point fixe égale à $\frac{\mathcal{E}_0}{\mathfrak{M}_0}$.

Les positions successives du point de percée R', souvent appelé pôle de la rotation, déterminent à la surface de l'ellipsoïde d'inertie une courbe gauche, la polhodie, et dans le plan tangent une courbe plane, l'herpolhodie. Ces deux courbes forment les bases des deux cônes dont il a été question au n° 1 et qui se trouvent ici complètement définies (*).

La polhodie est le lieu des points de l'ellipsoïde d'inertie dont les plans tangents sont à la même distance du centre de l'ellipsoïde. Il existe à la surface d'un ellipsoïde une infinité de polhodies, réparties en quatre séries, ce sont des courbes fermées sans point d'inflexion (fig. 7).

L'herpolhodie est une courbe plane qui en général ne se ferme pas, mais fait un nombre infini de circonvolutions autour du point M' de la figure 6 en restant comprise entre deux cercles concentriques (**).

(*) L'image de Poinsot permet de se représenter exactement les positions successives du corps, mais en supposant que l'on construise un modèle réalisant matériellement les deux cônes, il faudrait encore, pour reproduire complètement le mouvement, que le cône roulant soit animé à chaque instant d'une vitesse angulaire proportionnelle au rayon vecteur de l'ellipsoïde.

On est arrivé à réaliser cette condition grâce à la remarque suivante. solide estimée autour de l'axe invariable du moment cinétique est constante (équation 24). Cette considération a permis de reproduire complè-
La projection de ω sur $\mathfrak{M}$ est constante et par suite la vitesse angulaire du tement le mouvement de la rotation naturelle pour les modèles cinématiques de Sylvestre (*28*) et l'herpolhodographe de Darboux et Kœnigs (*55*).

(**) Pour la détermination analytique de ces deux courbes, voir APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle.*

8. CAS PARTICULIER OU L'ELLIPSOIDE D'INERTIE EST DE RÉVOLUTION. — Lorsque les trois axes de l'ellipsoïde relatif au point fixe sont inégaux, les mouvements que définit très clairement la représentation géométrique de Poinsot sont encore très compliqués. Dans la pratique, heureusement, on a le plus souvent affaire à des solides dont l'ellipsoïde est de révolution et la représentation du mouvement devient alors notablement plus simple.

Dans ce cas, en effet, d'après leur définition géométrique, les polhodies seront des parallèles de l'ellipsoïde de révolution et, par suite, le mouvement se ramène au roulement d'un cône de révolution sur un autre. Les herpolhodies comme les polhodies sont circulaires.

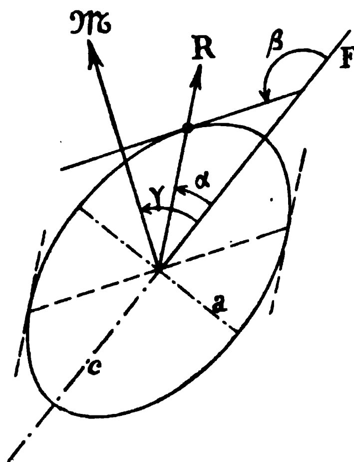


Figure 8.

Le plan tangent à l'ellipsoïde au pôle de la rotation instantanée sera normal au plan méridien de l'ellipsoïde qui contient ce pôle et le vecteur du moment cinétique normal au plan tangent sera contenu dans le même plan méridien. Les trois vecteurs OF, OR et O$\mathfrak{M}$, axe de figure, axe instantané de rotation et vecteur du moment cinétique, sont donc contenus dans un même plan.

Considérons l'ellipse méridienne correspondant à ce plan (fig. 8), soient $a = \frac{1}{\sqrt{A}}$ et $c = \frac{1}{\sqrt{C}}$ ses axes, le second c coïncidant avec l'axe de figure de l'ellipsoïde, nous savons que OR et le plan normal à O$\mathfrak{M}$ sont deux éléments conjugués de l'ellipsoïde, dans ce cas particulier OR et une normale à O$\mathfrak{M}$ seront deux directions conjuguées de l'ellipse méridienne et nous aurons (fig. 8) :

$$\text{tang}\,\alpha \,.\, \text{tang}\,\beta = -\frac{a^2}{c^2}$$

ou

$$\frac{\text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,\gamma}=\frac{a^2}{c^2}=\frac{C}{A} \qquad (26)$$

Relation très simple qui fixe les positions relatives des trois vecteurs OR, O$\mathfrak{M}$, OF dans leur plan, en fonction de la forme de l'ellipsoïde.

On peut immédiatement distinguer deux cas :

1°) Ellipsoïde d'inertie aplati (fig. 9). De ce que $C > A$ on a $\alpha > \gamma$, l'axe du moment cinétique est compris dans

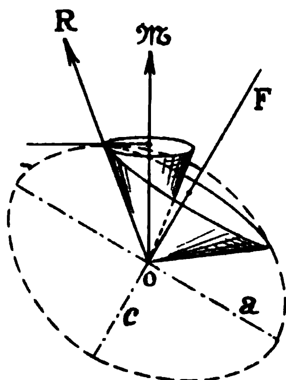


Figure 9.

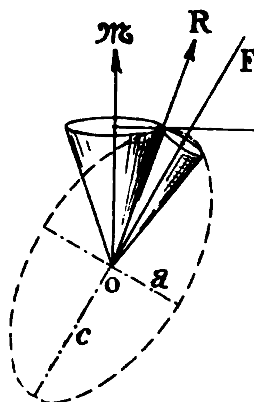


Figure 10.

l'angle FOR, par suite, le cône de polhodie roule sur la surface intérieure du cône d'herpolhodie.

2°) Ellipsoïde allongé (fig 10). Ici $C < A$ et $\alpha > \gamma$, le vecteur du moment cinétique est extérieur à l'angle FOR et le cône de polhodie roule sur la surface extérieure du cône d'herpolhodie.

Les figures 9 et 10 se rapportent respectivement au cas d'un disque pour lequel $C = 2A$ ($c = 0.706a$), et au cas d'un projectile d'artillerie $C = \frac{1}{4}A$ ($c = 2a$) ; le point O correspondant au centre de gravité.

9. Axes permanents de rotation. — Rotation stable ou instable. — Dans un mouvement de Poinsot, le vec-

teur-rotation se déplace continuellement en décrivant un cône autour du vecteur du moment cinétique, qui seul reste fixe et que nous pouvons appeler *directrice du mouvement* ou axe du mouvement de Poinsot.

La rotation ne sera permanente, ou encore, le vecteur OR ne sera constant en grandeur et en direction, que s'il est confondu avec le vecteur $O\mathfrak{M}$ et cela ne peut avoir lieu que si la rotation a lieu autour d'une direction principale d'inertie au point fixe. Dans ces conditions, en effet, la polhodie se réduit à un point et l'axe OR est confondu avec la direction fixe $O\mathfrak{M}$.

Il n'y a donc que trois axes permanents de rotation ; ils ne jouissent cependant pas exactement des mêmes propriétés car ils ne donnent pas lieu à des rotations également stables.

Si les trois axes de l'ellipsoïde sont inégaux, la rotation est stable autour du grand axe et autour du petit axe, elle est instable autour de l'axe moyen. En effet, si le corps subit, par exemple, un choc qui déplace infiniment peu le vecteur du moment cinétique, les trois vecteurs $O\mathfrak{M}$, OR et OF se séparent.

Si la rotation avait lieu autour du grand axe ou du petit axe, axes *a* ou *c*, figure 7, ces trois vecteurs se séparant infiniment peu, le mouvement subséquent serait caractérisé par une polhodie infiniment petite et le mouvement du système, infiniment peu modifié, serait donc stable.

Si, au contraire, le solide tourne autour de l'axe moyen, axe *b*, figure 7, une petite déviation du vecteur $O\mathfrak{M}$ amènera le pôle de la rotation en un point différent de l'extrémité de l'axe moyen et appartenant, par conséquent, à l'une des plus grandes polhodies de l'une des quatre séries dont il a été question plus haut. L'axe instantané de rotation s'écartera alors de sa position initiale d'une quantité finie dans le corps et dans l'espace, c'est bien un axe instable.

Si l'ellipsoïde d'inertie est de révolution, son axe de figure est le seul qui soit entouré de polhodies concentriques ; pour les mêmes raisons que l'axe maximum et l'axe minimum du cas précédent, il sera stable et il sera le seul axe stable.

Si l'ellipsoïde d'inertie se réduit à une sphère, un moment cinétique de direction quelconque donne lieu à une polhodie réduite à un point; chaque diamètre de la sphère constitue donc un axe permanent et possède les caractères d'un axe stable.

10. Solide mis en mouvement par une percussion.

1°) *Solide mobile autour de son centre de gravité maintenu fixe* :

Une percussion, dont l'alignement ne passe pas par le centre de gravité du solide percuté, fera apparaître à l'instant final de la percussion un moment cinétique donné par la relation

$$\overline{\mathfrak{M}} = \mathrm{V}l\,|\,\overline{\mathrm{P}}dt\,| \qquad (27)$$

l est la distance de la direction de la percussion au point fixe, $|\mathrm{P}dt|$ représente l'impulsion de la percussion, le plan passant par le point fixe et par l'alignement de la percussion, que nous pouvons appeler plan de la percussion, n'est autre que le plan du maximum des aires et il définit la direction du vecteur $\mathfrak{M}$.

Nous avons vu plus haut que l'axe instantané de rotation est conjugué à la direction du plan du moment cinétique. Cela permet de trouver la direction de l'axe de rotation dans le solide à la fin de la percussion, le mouvement ultérieur sera un mouvement de Poinsot.

Pendant la percussion, le point fixe subira une réaction brusque (répercussion).

2°) *Solide libre* :

La percussion excentrique sera décomposée en une percussion appliquée au centre de gravité qui déterminera la vitesse de translation du centre de gravité, et un couple de percussion qui produira un mouvement de Poinsot autour du centre de gravité.

3°) *Solide possédant un axe fixe* :

En formant le moment de la percussion par rapport à l'un des points de l'axe fixe on obtient le moment cinétique développé en ce point à l'instant final de la percussion.

En général, ce vecteur $\mathfrak{M}$ différera en direction de l'axe fixe. Nous avons vu plus haut (n°s 3, g et 5, c) moyennant quel couple tournant extérieur appliqué à l'axe, le mouvement de rotation peut avoir lieu autour de celui-ci, ce couple devant provenir ici des réactions des appuis définira entièrement ces dernières.

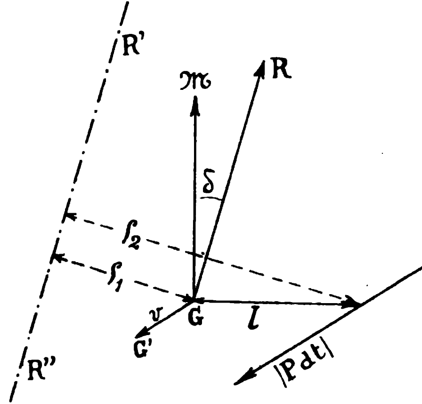


Figure 11.

Pendant la durée de la percussion, avant que le mouvement de régime ne s'établisse, l'axe subit des réactions ayant également ce caractère de percussions (répercussions).

On peut se proposer de chercher dans quelles conditions l'axe ne subira aucune répercussion; il suffit évidemment pour cela que l'axe soit instantané de rotation pendant la durée de la percussion.

Imaginons que le solide soit libre, soit G son centre de gravité, P l'alignement de la percussion ; le plan déterminé par G et P est le plan de la percussion et nous pouvons former le moment cinétique relatif au point G, il aura pour longueur avec les notations de la figure 11 :

$$\overline{\mathfrak{M}} = V\bar{l} \mid \overline{P}dt \mid . \qquad (27)$$

L'axe instantané de rotation correspondant sera GR dont la direction est conjuguée au plan GP considéré comme plan diamétral de l'ellipsoïde d'inertie au point G ; appellons I le moment d'inertie par rapport à OR, nous aurons (n° 3, c) :

$$I\omega = \mathfrak{M} \cos \delta \, .$$

Le solide tourne donc autour de GR avec une vitesse angulaire ω, mais en même temps, il subit une translation GG' avec une vitesse v déterminée par le théorème du

mouvement du centre de gravité, si M est la masse du solide, on a

$$M\bar{v} = |\bar{P}dt|$$

La droite du système qui restera absolument immobile sera donc une parallèle R'R'' à GR à une distance ρ_1 telle que

$$\omega\rho_1 = v.$$

En éliminant P, v, ω, $\mathfrak{M}$ entre les quatre équations qui viennent d'être écrites, on trouve :

$$\frac{I}{M} = \rho_1 l \cos\delta. \qquad (28)$$

Appellons ρ_2 la distance de R'R'' à P, on obtient :

$$\frac{I}{M} = \rho_1(\rho_2 - \rho_1) \qquad \frac{I + M\rho_1^2}{M} = \rho_1\rho_2$$

En remarquant que $I + M\rho_1^2$ est le moment d'inertie du solide autour de R'R'' et en désignant par k le rayon de gyration correspondant, on peut écrire :

$$k^2 = \rho_1\rho_2 \,. \qquad (28')$$

Cela nous permet de déduire les conclusions suivantes :

1°) La ligne d'action de la percussion doit être contenue dans le plan diamétral de l'ellipsoïde central, conjuguée à la direction de l'axe R'R'';

2°) Elle doit être perpendiculaire à l'axe R'R'';

3°) Elle doit se trouver du même côté que le centre de gravité par rapport à l'axe R'R''et à une distance ρ_2 donnée par $k^2 = \rho_1\rho_2$.

Si l'on mène par le centre de gravité une infinité de directions telles que GR, et les plans diamétraux conjugués qui leur correspondent, on remarque que la seconde condition ne peut être en général satisfaite que pour une direction dans chaque plan; elle ne pourra être satisfaite par toutes les directions du plan que pour les plans principaux.

Une percussion dont l'alignement satisferait aux deux

dernières conditions sans satisfaire à la première peut être décomposée de manière à se ramener à une percussion satisfaisant aux trois conditions et à une percussion appliquée en G et dirigée parallèlement à R'R''. Dans ce cas, le mouvement acquis après le choc se compose d'une rotation établie sans répercussion sur l'axe R'R'' et un glissement le long de cet axe. D'où la distinction entre les lignes d'actions rotatives et les lignes d'actions hélicoïdales [Anspach (*93*)].

Si un solide est porté par un axe passant par son centre de gravité, il est impossible de le mettre en mouvement par une percussion sans que l'axe subisse une répercussion.

11. Mouvement d'un solide autour d'un point fixe dans le cas général ou il y a des forces extérieures. — Généralisation de l'image de Poinsot. — On a vu au n° 6 à quelles difficultés l'on se heurte si l'on cherche à résoudre complètement le problème du mouvement d'un solide ayant un point fixe. La représentation géométrique de Poinsot permet cependant de se faire une idée de la solution.

En effet, supposons qu'à l'instant initial, le moment cinétique soit représenté par le vecteur $O\mathfrak{M}_0$, à cet instant le mouvement élémentaire du solide se ramène au roulement de son ellipsoïde d'inertie sur le plan normal à $O\mathfrak{M}_0$ à la distance OM'_0 du point fixe.

Si l'on connaît à chaque instant les forces sollicitantes (qui se ramènent à un couple C) on pourra former le lieu des extrémités du vecteur $O\mathfrak{M}$.

Pour chacune des positions sucessives $O\mathfrak{M}_0, O\mathfrak{M}_1, O\mathfrak{M}_2 \ldots$, on peut déterminer les points correspondants $M'_0, M'_1, M'_2 \ldots$, qui définissent les plans tangents sur lesquels l'ellipsoïde roule pendant les intervalles de temps *dt* successifs autour d'axes instantanés que l'on pourrait construire également avec les vitesses angulaires instantanées qui s'en déduisent.

On pourrait donc déterminer par une construction géométrique la position de l'ellipsoïde à la fin de chaque inter-

valle de temps dt en fonction de la position qu'il occupait au commencement de ce temps. De proche en proche, le mouvement pourrait être ainsi complètement représenté.

En reprenant l'expression : « directrice du mouvement de Poinsot » pour désigner la direction du vecteur $\mathfrak{M}$, nous pourrons résumer ce qui précède en disant que dans le cas général : *le solide exécute un mouvement de Poinsot autour d'une directrice variable qui n'est autre que le vecteur du moment cinétique entraîné sous l'influence des forces extérieures.* Nous aurons l'occasion d'utiliser cette définition plus loin (nos 33, 36, 49).

Il est à peine besoin d'ajouter que dans le cas d'un solide sans aucun point fixe le mouvement s'obtiendrait en superposant au mouvement du centre de gravité le mouvement de Poinsot généralisé qui vient d'être défini.

CHAPITRE II

L'EFFET GYROSTATIQUE

I. — Caractères particuliers des gyrostats. — Équation de l'effet gyrostatique.

12. Définitions. — Gyrostats. — Il résulte des théorèmes rappelés au chapitre précédent que lorsque dans les applications industrielles on cherchera à maintenir un solide en rotation, il faudra, pour éviter d'imposer aux appuis des réactions préjudiciables, que le mouvement soit communiqué autour d'une direction du solide réunissant les trois conditions suivantes :

1°) Passer par le centre de gravité ;

2°) Être un axe principal d'inertie pour annuler le moment centrifuge ;

3°) Être un axe principal stable.

Nous n'envisagerons donc que des solides tournant autour d'une direction centrale d'inertie entourée de polhodies concentriques.

En pratique même, et sauf indication contraire, nous n'aurons affaire qu'à des solides de révolution, ou, ce qui revient au même au point de vue dynamique, à des solides à ellipsoïde central de révolution tournant autour de l'axe de figure de cet ellipsoïde.

Imaginons que l'on s'efforce de faire tourner autour de

son axe de figure, un solide de l'espèce (disque, volant, projectile, etc.) supporté en son centre de gravité. Il est vraisemblable que, par suite des imperfections de la fabrication de l'objet ou des moyens mis en œuvre pour provoquer la rotation, l'axe matériel autour duquel se produira la rotation initiale fera un petit angle α avec l'axe principal d'inertie. Or nous savons (n° 8) que la relation :

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \gamma} = \frac{C}{A} \tag{26}$$

est applicable pour déterminer les positions relatives des vecteurs de la rotation instantanée, et du moment cinétique par rapport à l'axe de figure. Nous concluons de là que le vecteur du moment cinétique $\mathfrak{M}$ fera également avec l'axe de figure un petit angle γ et que les deux angles α et γ seront du même ordre de grandeur.

Le solide considéré, lancé par une impulsion initiale, exécutera donc un mouvement de Poinsot caractérisé par un cône d'herpolhodie très effilé ; en d'autres termes l'axe du moment cinétique $\mathfrak{M}$ constituera pour l'axe de figure une position moyenne autour de laquelle il tournera sans jamais s'en écarter d'une manière appréciable.

Supposons maintenant la rotation très rapide, le vecteur $\mathfrak{M}$ sera très grand et l'axe matériel de figure tournera autour de lui avec une très grande vitesse. Si dès lors une force extérieure vient à être appliquée à l'axe matériel qui tourne très vite autour de $\mathfrak{M}$ dont il est très peu écarté, on peut dire que la direction moyenne de cette force rencontre l'axe du moment cinétique $O\mathfrak{M}$, et on peut admettre sans erreur qu'au lieu d'être appliquée à l'axe matériel elle est appliquée au vecteur $O\mathfrak{M}$ lui-même.

Or nous savons d'autre part (n° 3, *e*), que si un couple extérieur agit sur un solide, le vecteur $O\mathfrak{M}$ sera dévié avec une vitesse angulaire d'autant moindre que $\mathfrak{M}$ sera plus grand.

Dans le cas des hypothèses faites, la déviation de $\mathfrak{M}$ sera donc très lente, tandis que l'axe matériel tournera autour de lui sans cesser d'en rester très voisin tout comme dans le cas où aucun couple extérieur n'agirait.

Le mouvement du solide autour de son centre de gravité fixe est alors un mouvement de Poinsot généralisé (n° 11), avec cette particularité que l'axe de figure matériel reste pratiquement confondu avec le vecteur du moment cinétique.

Le vecteur $\mathfrak{M}$ devient en quelque sorte pour l'axe matériel une doublure immatérielle qui lui confère sespropriétés spéciales.

Ces considérations, qui peuvent sembler surperflues, constituent à la fois la base et la justification de l'étude de l'*effet gyrostatique*, qui se manifeste chaque fois qu'il peut y avoir pratiquement coïncidence entre l'axe du moment cinétique et l'axe matériel d'un solide tournant.

Nous appellerons désormais *gyrostat, un solide dont l'ellipsoïde d'inertie central présente un axe de révolution, animé autour de cet axe d'une vitesse angulaire très grande comparativement aux autres rotations auxquelles le solide peut être appelé à participer*.

Cette définition entraîne comme conséquence que le produit $J\Omega$, de la vitesse angulaire par le moment d'inertie correspondant à l'axe de rotation, sera très grand comparativement à l'impulsion par unité de temps des couples de forces extérieures susceptibles d'agir sur le système.

(Le produit $J\Omega$ n'est autre que le moment cinétique du gyrostat par rapport à un point quelconque de son axe.)

13. Principe fondamental de l'effet gyrostatique. — Règle des trois doigts. — Dans le cas le plus général, les forces agissant sur un gyrostat pourront se réduire à une résultante et à un couple.

La *résultante* n'intéressera que le mouvement du centre de gravité, si le gyrostat est libre dans l'espace ; et dans les autres cas, elle sera neutralisée par la fixité des points d'appui.

Le *couple* pourra toujours être décomposé en deux autres :

Le premier agissant dans un plan normal à l'axe du gyrostat, sans altérer l'orientation de celui-ci, tendra à

accélérer ou à ralentir sa vitesse propre : cette vitesse étant supposée très grande, l'effet produit sera faible, on pourra ne pas en tenir compte, et considérer la vitesse propre du gyrostat comme constante.

Le second couple, agissant dans un plan qui contient l'axe du gyrostat, aura pour effet d'en modifier l'orien-

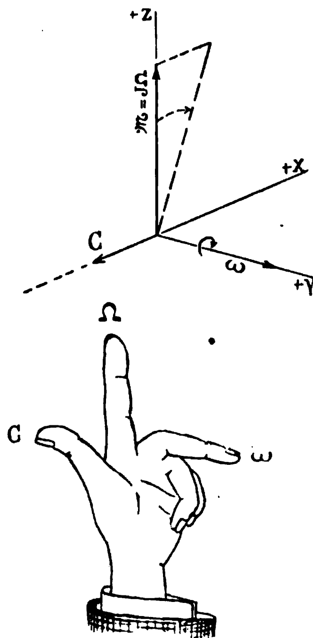


Figure 13.
Main gauche.
Couple de réaction gyrostatique provoqué par une précession forcée.

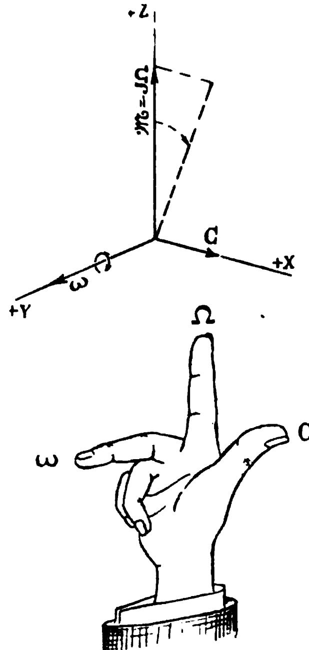


Figure 12.
Main droite.
Précession produite par un couple déviateur.

tation ; nous l'appellerons *couple déviateur*, son vecteur représentatif sera normal à l'axe du gyrostat.

Appelons J le moment d'inertie et Ω la vitesse de rotation propre du gyrostat ; le vecteur du moment cinétique supposé par définition même du gyrostat pratiquement confondu avec son axe de figure aura pour longueur

$$\mathfrak{M} = J\Omega \, .$$

Soit C le couple déviateur, normal à l'axe du gyrostat, donc normal à $\mathfrak{M}$ (fig. 12).

En vertu du théorème du moment cinétique nous aurons

$$\frac{d\overline{\mathfrak{M}}}{dt} = \overline{C}. \tag{8}$$

Comme par hypothèse $\overline{C}$ est normal à $\overline{\mathfrak{M}}$ nous pouvons exprimer autrement le déplacement angulaire de $\mathfrak{M}$.

$$\overline{\mathfrak{M}} \frac{\overline{d\varphi}}{dt} = \overline{C} .$$

Ou, plus simplement, en désignant par ω la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ de la déviation de $\overline{\mathfrak{M}}$ (et de l'axe du gyrostat qui ne s'en écarte pas), on écrira :

$$\omega = \frac{C}{J\Omega} \tag{29}$$

D'où le théorème :

Un couple extérieur qui tend à dévier un gyrostat dans un plan déterminé, fait en réalité tourner l'axe du gyrostat dans un plan perpendiculaire, avec une vitesse angulaire proportionnelle à ce couple et inversement proportionnelle au moment cinétique du gyrostat.

On remarquera (fig. 12) que l'axe de figure du gyrostat se déplace dans un sens tel qu'il paraît chercher à se superposer à l'axe du couple déviateur; ce déplacement est la *précession*.

On peut aussi recourir à la règle mnémonique suivante que nous appellerons la règle des trois doigts : *Formant avec l'index, le pouce et le médius* de la main droite *les arêtes d'un trièdre, si l'index est dirigé dans la direction du vecteur* Ω *et le pouce dans la direction du couple* C, *le médius indiquera le sens du vecteur* ω *de la précession* (fig. 12).

Réciproquement : si un gyrostat est entraîné dans un mouvement qui comporte une rotation autour d'un axe perpendiculaire à son axe de figure, c'est-à-dire s'il est soumis à une *précession forcée* de vitesse angulaire donnée ω, il exercera à chaque instant sur ses appuis un couple de réaction égal et contraire au couple extérieur qui serait capable de produire la précession ω.

La grandeur de ce *couple de réaction gyrostatique* est donnée par

$$C = J\Omega\omega \,. \qquad (30)$$

D'où l'énoncé de la réciproque du théorème précédent :

Un gyrostat dévié de sa direction dans un plan donné, exerce dans un plan normal un couple de réaction gyrostatique égal au produit de son moment cinétique par la vitesse angulaire de la désorientation.

Le sens d'action de ce couple (fig. 13) est tel qu'il paraît chercher à ramener l'axe de la rotation propre sur l'axe de la précession forcée.

En reprenant la règle des trois doigts on dira : *Formant avec l'index, le pouce et le médius,* de la main gauche, *les arètes d'un trièdre, si l'index est dirigé dans la direction du vecteur* Ω *et le médius dans la direction du vecteur* ω *de la précession forcée, le pouce indiquera le sens du couple de réaction gyrostatique* (fig. 13).

14. Tendance au parallélisme des axes de rotation. — Si l'on envisage simultanément le théorème précédent et sa réciproque, on voit que le couple déviateur d'une part, et la précession forcée d'autre part, tendent à produire des effets identiques et l'on peut envelopper les deux propositions dans un même énoncé :

L'axe de la rotation propre et l'axe de la rotation que l'on cherche à faire naître — par un couple ou par entraînement — tendent à se superposer en direction et en sens de telle façon que le déplacement de l'axe de la rotation propre ait lieu par le plus court chemin.

Cette propriété, souvent appelée à tort : tendance à la

conservation de la rotation est en réalité une tendance des rotations aux parallélismes : elle a été énoncée pour la première fois par Foucault (14), lors de ses célèbres expériences du gyroscope (*).

15. Introduction de l'effet gyrostatique dans les problèmes de mécanique appliquée. — Lorsque dans les applications on rencontrera un système mécanique comportant des gyrostats, les deux équations de l'effet gyrostatique

$$\omega = \frac{C}{J\Omega} \qquad \text{et} \qquad C = J\Omega\omega \qquad (29 \text{ et } 30)$$

permettront la mise en équation. Les signes à attribuer dans chaque cas à ω et à C, qui dépendront du choix des axes seront déterminés, par exemple, par la règle des trois doigts.

On commencera par écrire les équations générales d'équilibre du système comme si le gyrostat qu'il comporte ne tournait pas et on complètera les équations par l'introduction de termes gyrostatiques qui interviennent tout comme des réactions d'inertie ordinaires.

On facilitera les opérations en tenant compte des remarques suivantes :

I. Un gyrostat étant essentiellement caractérisé par son moment cinétique $J\Omega$, et celui-ci étant de nature vectorielle, on pourra toujours le décomposer comme un couple ou une vitesse angulaire. Si l'on se sert d'un trièdre de référence trirectangle, on pourra substituer à un gyrostat dont les angles directeurs de l'axe sont α, β, γ, trois gyrostats composants $(J\Omega)_x = J\Omega \cos \alpha$, $(J\Omega)_y = J\Omega \cos \beta$, $(J\Omega)_z = J\Omega \cos \gamma$.

II. Si un système mécanique comporte plusieurs gyrostats, on pourra les supposer remplacés à chaque instant par un gyrostat unique caractérisé par un moment cinétique égal à $\Sigma\,(\overline{J\Omega})$.

(*) Foucault a donné de cette propriété une explication plutôt qualitative que l'on trouvera plus loin (n° 25).

III. Les systèmes comportant des gyrostats ont généralement un point fixe, ou entraîné dans un mouvement connu, on le prendra pour origine de trois axes rectangulaires dirigés suivant les directions principales d'inertie du système en ce point.

On écrira les six équations générales de la dynamique des solides indéformables sous la forme suivante — sans tenir compte de la rotation des gyrostats :

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma m \frac{dv_x}{dt} - \Sigma X &= o \\
\Sigma m \frac{dv_y}{dt} - \Sigma Y &= o \\
\Sigma m \frac{dv_z}{dt} - \Sigma Z &= o \\
I_x \frac{d\omega_x}{dt} - \Sigma C_x &= o \\
I_y \frac{d\omega_y}{dt} - \Sigma C_y &= o \\
I_z \frac{d\omega_z}{dt} - \Sigma C_z &= o
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

X, Y, Z, C_x, C_y, C_z, sont les composantes des forces et des couples extérieurs suivant les axes, v_x, v_y, v_z, ω_x, ω_y, ω_z sont les composantes des vitesses de translation et des vitesses angulaires *absolues* rapportées *à chaque instant* aux axes mobiles considérés — toujours abstraction faite de la rotation propre des gyrostats.

Si le système comporte un gyrostat de moment cinétique $J\Omega$, on le supposera décomposé suivant les axes en trois gyrostats $J\Omega \cos\alpha$, $J\Omega \cos\beta$, et $J\Omega \cos\gamma$, qui seront l'objet de précessions forcées et créeront des couples de réaction gyrostatiques.

Par exemple, autour de l'axe des x on aura un couple de réaction dû au gyrostat $(J\Omega)_y$ entraîné dans la rotation ω_z, ainsi qu'un couple dû à $(J\Omega)_z$ entraîné dans la rotation ω_y.

En tenant compte de la règle des trois doigts et des conventions habituelles pour les signes des trois axes on aura

$$C'_x = J\Omega \cos \beta \, \omega_z - J\Omega \cos \gamma \, \omega_y \, .$$

En permutant les indices, on obtient trois couples analogues qu'il faut introduire dans les équations (31), pour tenir compte de la rotation des gyrostats ; elles deviennent alors :

$$\left.\begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - J\Omega \cos \beta \, \omega_z + J\Omega \cos \gamma \, \omega_y &= \Sigma C_x . \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - J\Omega \cos \gamma \, \omega_x + J\Omega \cos \alpha \, \omega_z &= \Sigma C_y . \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - J\Omega \cos \alpha \, \omega_y + J\Omega \cos \beta \, \omega_x &= \Sigma C_z . \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Ce sont des équations directement utilisables dans les applications techniques où, comme nous le verrons, elles sont en général susceptibles de simplification.

16. Remarque. — Degré d'approximation des équations précédentes. — Dans le raisonnement précédent qui conduit aux équations (32), on ne tient compte de l'effet gyrostatique que pour les parties du système considérées comme formant des gyrostats, au sens attribué à ce mot au n° 12. Or, l'effet gyrostatique n'est qu'un cas particulier d'application du théorème du moment cinétique ; on n'a donc ici appliqué ce théorème qu'aux parties formant gyrostat, alors qu'en toute rigueur il faudrait l'appliquer à toutes les masses du système qui participent aux rotations ω_x, ω_y et ω_z.

Au lieu de ne considérer que le moment cinétique du gyrostat $J\Omega \cos \alpha$, par exemple, il faudrait tenir compte d'un moment cinétique

$$\mathfrak{M}_x = J\Omega \cos \alpha + I_x \omega_x \, .$$

relatif à l'ensemble du système y compris le gyrostat. De

même on remplacerait ainsi $J\Omega \cos \beta$ et $J\Omega \cos \gamma$ par des expressions analogues $\mathfrak{M}_y$ et $\mathfrak{M}_z$ et les équations 32 prendraient la forme

$$\left.\begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - \mathfrak{M}_y \omega_z + \mathfrak{M}_z \omega_y &= \Sigma C_x . \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - \mathfrak{M}_z \omega_x + \mathfrak{M}_x \omega_z &= \Sigma C_y . \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - \mathfrak{M}_x \omega_y + \mathfrak{M}_y \omega_x &= \Sigma C_z . \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Nous retrouvons ainsi les équations (15) du n° 6 qui sont une forme des équations d'Euler.

L'erreur commise en utilisant les équations pratiques (32) provient donc du fait d'avoir négligé des facteurs de l'ordre de grandeur de $I_x \omega_x$ devant $J\Omega$; or, par la définition même du gyrostat, nous savons que cette erreur sera très faible.

Si l'on considère un solide mobile autour d'un point fixe comme la réunion de trois gyrostats dirigés suivant ses directions principales et caractérisés par les moments cinétiques $I_x\omega_x$, $I_y\omega_y$, $I_z\omega_z$, il suffit d'exprimer le couple de réaction gyrostatique autour de chacun de ces trois axes pour retrouver au lieu des équations (32), les équations d'Euler (16-17-18). C'est une interprétation pratique des équations d'Euler et un moyen simple de les établir.

17. Expériences de vérification. — Apparences paradoxales. — Le principe fondamental de l'effet gyrostatique peut être le mieux vérifié au moyen de l'appareil classique de Fessel et Plücker (*20*) (fig. 14); il consiste en un gyrostat, monté dans un cadre prolongé par une tige portant un contrepoids P dont la position est réglable. L'ensemble peut tourner autour d'un axe horizontal formé par un couteau reposant sur une fourche qui, à son tour, peut tourner dans le support S autour d'un axe vertical.

L'axe du gyrostat peut ainsi prendre une orientation quelconque autour du point fixe constitué par la croisée

des deux axes de rotation, et de plus en donnant au contrepoids P une position convenable on peut rendre l'équilibre de l'appareil indifférent à l'action de la pésanteur.

Lorsque le fléau se trouve ainsi en équilibre indifférent il restera immobile, que le tore soit en rotation ou non.

S'il est en rotation rapide dans le sens de la flèche Ω et si l'on exerce sur l'extrémité une force telle que F_1, ce qui revient à appliquer au point fixe un couple C_1, on observe

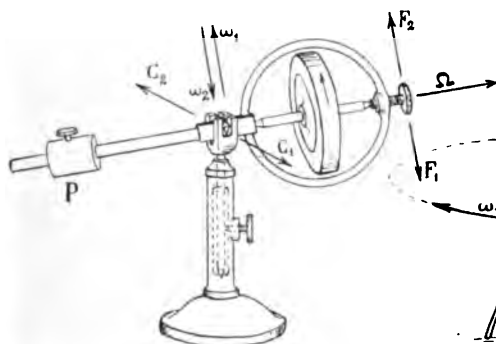


Figure 14.

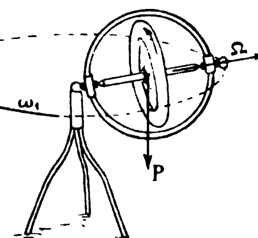


Figure 15.

un mouvement de précession ω_1; de même un couple C_2 causé par une force F_2 provoque une précession ω_2.

Supposons en particulier le fléau horizontal, on peut créer à volonté un couple C_1 ou C_2 en reculant le poids P vers la droite ou vers la gauche et on observe que la précession se produit autour de la verticale avec la vitesse angulaire constante annoncée par la théorie

$$\omega = \frac{C}{J\Omega}. \tag{29}$$

La même expérience se réalise au moyen de la toupie gyroscopique des bazars (fig. 15) dont le poids propre, en porte à faux, détermine le couple déviateur.

Les mêmes phénomènes peuvent s'observer avec toute une série d'appareils ingénieux que l'on trouve dans les cabinets de physique, entre autres l'appareil de Bohnenberger, le tore-pendule et le polytrope de Sire, le culbuteur

de Hardy, etc., dont il existe de nombreuses descriptions (*).

Reprenons l'appareil de Fessel en équilibre indifférent et en rotation rapide; les phénomènes observés peuvent se résumer en quelques mots : L'application d'une force telle que F_1 ou F_2 *ne produit aucun déplacement de son point d'application dans sa propre direction, le gyrostat résiste et se dérobe suivant une direction perpendiculaire*, enfin, le mouvement de précession ainsi établi s'arrête aussitôt que cesse l'action de la force.

Ces faits paraissent en contradiction avec les principes fondamentaux de la mécanique; d'une part, en effet, le point d'application de la force ne s'est pas déplacé dans la direction de celle-ci, il n'y a donc pas eu de travail dépensé et cependant un mouvement a été produit; d'autre part l'application continue d'une force a été nécessaire pour entretenir un mouvement uniforme.

Ce ne sont là évidemment que des apparences paradoxales; l'établissement du mouvement de précession a en réalité exigé une certaine dépense d'énergie, le gyrostat s'est déplacé dans le plan du couple sollicitant et la précession elle-même n'est pas un mouvement uniforme.

Une observation précise permet, en effet, de reconnaître que le trajet parcouru par un point de l'axe, et qui semble régulier, est décomposable en une succession très rapide de boucles identiques, d'amplitude si faible qu'elles échappent à une observation superficielle.

Ce mouvement qui paraît uniforme a été appelé *précession pseudo-régulière*, et les petits mouvements transversaux qui se superposent à la précession constituent la *nutation*.

18. Gyrostat soumis a une percussion. — Vibration de l'axe. — Considérons un gyrostat mobile autour d'un point fixe O appartenant à son axe; supposons, pour éliminer l'influence de la pesanteur, que ce point soit le centre de gravité (fig. 6) (c'est le cas, par exemple, de l'appareil de Fessel exactement équilibré).

(*) Voir notamment le *Dictionnaire des Mathématiques* de Sonnet.

Supposons que l'on exerce, en un autre point de l'axe, une force instantanée ou, plus exactement, un couple de percussion capable d'imprimer au gyrostat une vitesse angulaire ω_0.

Choisissons trois axes rectangulaires OXYZ (fig. 16), la direction initiale de l'axe du gyrostat définira OX, le plan de la rotation ω_0 déterminera le plan XOZ et par suite également OY.

Appelons θ l'angle dont le gyrostat aura tourné autour

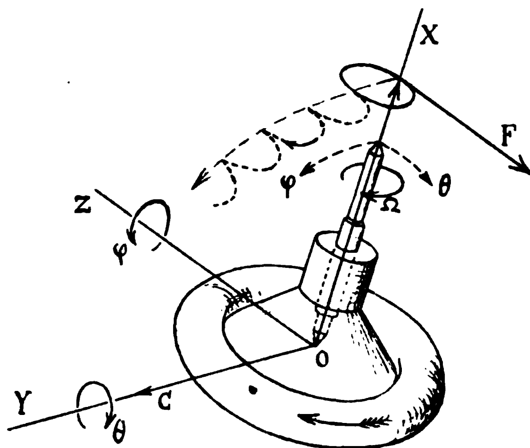


Figure 16.

de OY et φ l'angle dont il aura tourné autour de OZ au temps t.

La rotation initiale $\omega_0 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0}$ ayant lieu dans le sens positif, il en résultera un couple de réaction gyrostatique $J\Omega \frac{d\theta}{dt}$ qui tendra à faire tourner l'appareil autour de OZ dans le sens positif. Soit $\frac{d\varphi}{dt}$ la vitesse angulaire ainsi produite, elle provoquera à son tour autour de OY, et dans le sens négatif, un couple de réaction $- J\Omega \frac{d\varphi}{dt}$.

Si nous appelons I_y et I_z les moments d'inertie du sys-

tème (tore, axe, accessoires, etc.) par rapport à OY et à OZ, nous pourrons écrire les équations d'équilibre :

$$\left.\begin{aligned} I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} - J\Omega \frac{d\theta}{dt} &= o \,. \\ I_y \frac{d^2\theta}{dt^2} + J\Omega \frac{d\varphi}{dt} &= o \,. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

On aurait pu écrire directement ces équations qui sont une application immédiate des équations (32).

La première s'intègre directement et donne en tenant compte des conditions initiales :

$$\theta = o \,, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \,, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi = o \,, \text{ pour } t = o \,:$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{J\Omega}{I_z} \theta \,.$$

Après élimination de φ entre cette intégrale et la seconde des équations (33), on obtient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{J^2\Omega^2}{I_y I_z} \theta = o \,,$$

qui admet comme intégrale :

$$\theta = C_1 \sin \frac{J\Omega}{\sqrt{I_x I_v}} t + C_2 \cos \frac{J\Omega}{\sqrt{I_x I}} t \,,$$

avec

$$C_1 = \frac{\omega_0 \sqrt{I_y I_x}}{J\Omega} \quad \text{et} \quad C_2 = o \,,$$

il vient finalement :

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \omega_0 \frac{\sqrt{I_y I_z}}{J\Omega} \sin \frac{J\Omega}{\sqrt{I_y I_z}} t \\ \varphi &= \omega_0 \frac{I_y}{J\Omega} \left(1 - \cos \frac{J\Omega}{\sqrt{I_y I_z}} t \right) \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Tandis qu'un corps de même masse, mais ne tournant pas sur lui-même (n'ayant donc pas les caractères distinctifs d'un gyrostat) s'éloignerait indéfiniment de sa position initiale sous l'effet du couple de percussion appliqué, nous voyons au contraire l'axe du gyrostat s'en éloigner très peu et y revenir périodiquement en exécutant des oscillations elliptiques d'amplitude d'autant plus faible et de période d'autant plus courte que le caractère gyrostatique est plus accentué.

En effet, un point de l'axe du gyrostat qui se trouve à l'unité de distance du point *o* décrit une petite ellipse dont les demi-axes sont $\frac{\sqrt{I_y I_z}}{J\Omega}$ et $\frac{I_y}{J\Omega}$, ils sont inversement proportionnels à $J\Omega$; ces oscillations elliptiques de l'axe sont isochrones et leur période est donnée par

$$T = \frac{2\pi\sqrt{I_y I_z}}{J\Omega} \tag{35}$$

Les deux axes de l'ellipse décrite par un point quelconque de l'axe sont entre eux comme $\sqrt{\frac{I_y}{I_z}}$; dans le cas d'un appareil de Fessel où I_z et I_y sont pratiquement égaux, les vibrations seraient circulaires.

Il suffit de donner, au moyen d'un corps dur, un coup sec sur la tige d'une balance de Fessel pour voir se produire les oscillations circulaires de très faible amplitude annoncées par la théorie qui précède.

C'est même, sans doute, de cette expérience qu'est née l'idée si répandue d'une stabilité spéciale inhérente aux corps en rotation rapide et le principe inexact, souvent invoqué, de la conservation de l'axe de rotation.

19. Gyrostat soumis a une force a action continue. — Nutation. — Voyons maintenant ce qui se passe lorsqu'au lieu d'une force instantanée, ou d'un couple de percussion, on a un couple à action continue dû à une force telle que F (fig. 16) continuellement normale à l'axe.

Reprenons les mêmes notations et supposons la force appliquée parallèle à OZ, le couple C qu'elle produit aura OY pour axe et nous pourrons écrire les conditions d'équilibre en introduisant ce couple dans les équations (33) du cas précédent, ce qui donne :

$$\left.\begin{aligned} I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} - J\Omega \frac{d\theta}{dt} &= o \\ I_y \frac{d^2\theta}{dt^2} + J\Omega \frac{d\varphi}{dt} - C &= o \end{aligned}\right\} \quad (33')$$

Intégrons la première et éliminons φ, comme plus haut, en tenant compte des conditions initiales qui sont ici :

$$\theta = \frac{d\theta}{dt} = o, \qquad \varphi = \frac{d\varphi}{dt} = o, \text{ pour } t = o,$$

il vient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{J^2\Omega^2}{I_y I_z}\theta - \frac{C}{I_y} = o$$

dont l'intégrale générale est :

$$\theta = C_1 \sin \frac{J\Omega}{\sqrt{I_y I_z}} t + C_2 \cos \frac{J\Omega}{\sqrt{I_y I_z}} t + \frac{C I_z}{J^2\Omega^2}$$

avec $C_1 = o$ et $C_2 = -\frac{C I_z}{J^2\Omega^2}$.

Il vient finalement :

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{C I_z}{J^2\Omega^2}\left(1 - \cos \frac{J\Omega}{\sqrt{I_y I_z}} t\right) \\ \varphi &= \frac{C}{J\Omega} t - \frac{C\sqrt{I_y I_z}}{J^2\Omega^2} \sin \frac{J\Omega}{\sqrt{I_y I_z}} t \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Le mouvement se compose d'un déplacement angulaire à vitesse uniforme, dans un plan normal au plan du couple, auquel se superpose une oscillation elliptique de période :

$$T = \frac{2\pi\sqrt{I_x I_y}}{J\Omega}. \qquad (35)$$

Le mouvement uniforme n'est autre que la précession dont la vitesse pouvait se déduire de la relation connue $\omega = \frac{C}{J\Omega}$; quant au mouvement elliptique qui s'y combine, son origine est la même que celle des vibrations du cas précédent; ce mouvement de nutation est provoqué par l'application supposée instantanée de la force F, à l axe.

Si $I_y = I_z$, les vibrations elliptiques deviennent circulaires et on reconnaît que les trajectoires décrites par les différents points de l'axe du tore sont des cycloïdes. En particulier, le point situé à l'unité de distance du point fixe *o*, décrit un cycloïde dont le cercle générateur a pour rayon $\frac{CI}{J^2 \Omega^2}$; la hauteur totale des cannelures décrites par l'axe à la même distance du point fixe est :

$$\theta_1 = \frac{2CI}{J^2 \Omega^2}. \tag{37}$$

Le calcul qui précède établit donc que le mouvement de précession s'accompagne de vibrations transversales dont l'amplitude est exprimée par une fraction ayant $J^2\Omega^2$ au dénominateur. Cette amplitude est très faible et elle échappe en général à une observation superficielle

Exemple : Une toupie gyroscopique ordinaire (fig. 15) pèse 200 grammes avec son armature, le tore seul pèse 170 grammes, son rayon de gyration est de 2,8 cm., il est lancé à la vitesse de 120 tours ou 753 radians par seconde. L'axe étant disposé horizontalement, la pesanteur exerce un couple $C = 200 \times 4 = 800$ gr. cm., on calcule facilement que $J = 1.36$ et $I = 3.88$.

La vitesse du moyen mouvement de précession est :

$$\omega = \frac{C}{J\Omega} = \frac{800}{1,36 \times 753} = 0,78 \text{ rad/sec},$$

soit un tour complet en 8,05 secondes.

L'amplitude des mouvements de nutation à l'extrémité de l'axe, soit à 8 cm. du point fixe est :

$$8 . \theta_1 = 8 . \frac{2CI}{J^2\Omega^2} = \frac{8 \times 2 \times 800 \times 3,88}{\overline{1,36}^2 \times \overline{753}^2} = 0,047 \text{ cm}.$$

et la période des vibrations de nutation :

$$T = \frac{2\pi I}{J\Omega} = \frac{2 \times 3,14 \times 3,88}{1,36 \times 753} = 0,0238 \text{ sec} .$$

L'axe décrit donc pendant un tour complet de précession, $\frac{8,05}{0,0238} = 338$ cannelures de 0,47 mm. d'amplitude; eu égard à la persistance des sensations visuelles sur la rétine, l'observateur aura l'impression d'un mouvement uniforme affecté tout au plus d'un léger tremblottement. Notons de plus que le cas de la toupie gyroscopique est défavorable et qu'en se servant d'un appareil de Fessel où le couple C peut être rendu beaucoup plus faible, les vibrations de nutation peuvent devenir absolument imperceptibles.

20. — TRAVAIL DÉPENSÉ POUR ÉTABLIR UN MOUVEMENT DE PRÉCESSION. — L'examen plus précis, qui vient d'être fait, des circonstances du mouvement de précession permet d'expliquer complètement les paradoxes énoncés au nº 17.

Le couple extérieur appliqué commence par produire un premier déplacement dans son plan; ce déplacement agissant comme précession forcée fait naître un couple de réaction dans un plan normal à la vitesse acquise par les différents points de l'axe. Il en résulte que la trajectoire d'un point quelconque de l'axe du gyrostat s'incurve jusqu'à l'instant où elle se dirige dans le plan du couple appliqué mais en sens opposé à ce dernier, une position d'équilibre est bientôt atteinte, et une première boucle de la cycloïde est ainsi parcourue.

A ce moment, l'axe du gyrostat reste un instant immobile, il n'y a plus de couple gyrostatique, le couple extérieur agit seul et le même cycle de déplacements angulaires se reproduit.

Commencement du mouvement. — Pendant la première demi-oscillation, le solide se dévie d'un certain angle dans le plan du couple; celui-ci a donc produit un travail. Quant aux demi-oscillations subséquentes, elles s'accompagnent

de travaux alternativement positifs et négatifs, qui se compensent exactement, et se maintiendraient indéfiniment sans l'intervention des frottements.

Le travail du couple extérieur, pendant la demi-oscillation initiale, est

$$C\theta_1 = \frac{2C^2 I}{J^2 \Omega^2},$$

(en supposant $I_y = I_z = I$).

Cette énergie se retrouve à la fin de la demi-oscillation sous forme d'énergie cinétique. En effet, celle-ci a pour valeur $\frac{1}{2} I \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, expression dans laquelle $\frac{d\varphi}{dt}$ doit être remplacé par sa valeur tirée de (36) avec la condition $t = \frac{T}{2}$; on retrouve bien ainsi :

$$\frac{2C^2 I}{J^2 \Omega^2}.$$

En considérant le mouvement du gyrostat comme la superposition du moyen mouvement de précession et du mouvement d'oscillation transversal de nutation, on peut dire que chacun de ces mouvements absorbe une partie de l'énergie communiquée par le couple extérieur. Pour le mouvement de nutation on trouve facilement que cette énergie est donnée par l'expression $\frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ dans laquelle $\frac{d\theta}{dt}$ est pris avec sa valeur maximum tirée de (36), ce qui conduit à :

$$\frac{C^2 I}{J^2 \Omega^2},$$

c'est-à-dire que le mouvement de nutation absorbe la moitié du travail dépensé. Si le mouvement d'oscillation est peu à peu amorti par les frottements, l'amplitude des boucles de nutation ira en diminuant jusqu'à s'annuler et il ne subsistera plus alors qu'un mouvement moyen de précession $\left(\text{sur un cercle caractérisé par } \theta = \frac{\theta_1}{2}\right)$.

Le travail extérieur aura, en fin de compte, servi à

deux choses, une moitié se sera dissipée en frottements; l'autre moitié que nous pouvons appeler ***énergie intrinsèque de la précession*** aura servi à créer la précession proprement dite.

Fin du mouvement. — Supposons maintenant — les oscillations ayant cessé par suite des résistances passives et le gyrostat étant animé du seul mouvement de précession — que l'action du couple extérieur C cesse brusquement.

Le système animé de la vitesse acquise $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{J\Omega}$, n'étant soumis à aucune force, se trouvera exactement dans les conditions du gyrostat étudié au n° 18, qui, à l'instant final de la percussion, se trouve animé d'une vitesse ω_0 mais sur lequel n'agit aucun couple extérieur. Le mouvement se terminera donc par une vibration elliptique dont l'amplitude peut être déduite de la première des relations (34) en ayant soin d'y faire $\omega_0 = \frac{C}{J\Omega}$. On trouve ainsi (en admettant comme plus haut pour simplifier $I_y = I_z = I$), pour l'amplitude de ces oscillations : $\frac{CI}{J^2\Omega^2}$. Ces oscillations s'amortiront également par frottement et on peut dire que l'énergie intrinsèque se dissipe à son tour en chaleur, dès que cesse la cause de la précession.

Si I_y et I_z sont différents, les conclusions qui précèdent ont un caractère un peu plus général; on peut les énoncer en disant que l'énergie fournie par les forces extérieures produisant un mouvement de précession, se partage en deux parties : l'une provoque un mouvement vibratoire et se dissipe en chaleur, l'autre reste emmagasinée à l'état potentiel dans un mouvement uniforme, c'est l'énergie intrinsèque de la précession; dès que les forces extérieures cessent d'agir, l'énergie intrinsèque à son tour se libère, se dissipe en chaleur, et la précession s'arrête.

21. Analogie des conséquences de l'effet gyrostatique avec certains phénomènes électromagnétiques. — Les

quelques conséquences de l'effet gyrostatique, qui viennent d'être examinées, ne fût-ce que la forme de la règle mnémotechnique donnée au n° 13. amènent naturellement à l'esprit des rapprochements entre ces phénomènes et d'autres plus familiers aux ingénieurs et aux électriciens.

Les ressemblances entre certaines manifestations particulières de phénomènes n'ayant entre eux aucun rapport concret, sont d'ailleurs fréquentes en physique, à tel point que des équations identiques permettent souvent l'étude de phénomènes d'ordres très différents.

Les exemples les plus classiques ont été fournis par les physiciens anglais de l'école des Kelvin et des Maxwell, dont les comparaisons élégantes et les modèles mécaniques ingénieux ont facilité l'interprétation de phénomènes complexes et ont même permis d'en prévoir des conséquences nouvelles.

L'intérêt des analogies n'est pas moins grand dans le domaine de l'ingénieur que dans celui du physicien, et sans la crainte d'allonger outre mesure ce chapitre, on pourrait en citer de nombreux exemples et montrer combien elles facilitent la compréhension ou simplifient la solution de beaucoup de problèmes. Dans cet ordre d'idées, l'énoncé des quelques remarques qui vont suivre ne sera peut-être pas absolument dépourvu d'intérêt.

Une première analogie se déduit du principe fondamental lui-même. En effet, tandis que pour faire tourner un système quelconque autour d'un axe avec une vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$, il suffit d'appliquer autour de cet axe un couple I $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$; s'il s'agit d'un gyrostat, il faudra appliquer en outre un couple normal au premier pour neutraliser à chaque instant le couple de réaction $J\Omega \frac{d\varphi}{dt}$ produit par la rotation $\frac{d\varphi}{dt}$. Cela permet de donner du principe fondamental l'énoncé suivant, d'un caractère tout à fait

général : *Les réactions produites par le déplacement d'un gyrostat tendent à s'opposer aux forces capables de produire le même déplacement.*

Cet énoncé rappelle par son allure la loi de Lens, classique en électromagnétisme : Le déplacement d'un circuit dans un champ magnétique produit dans ce circuit une force contre-électromotrice qui tend à s'opposer au courant capable de produire le même déplacement.

La présence du champ crée une réaction électromagnétique tout comme la rotation rapide donne naissance à une réaction gyrostatique.

L'analogie est complète si l'on reprend les règles de Fleming indiquées dans les cours d'électricité et la règle des trois doigts du n° 13 (*).

Cette analogie se poursuit si l'on passe aux conséquences immédiates des deux phénomènes que nous rapprochons. Par exemple, les phénomènes de la self-induction à la fermeture et à la rupture d'un circuit sont absolument analogues aux circonstances qui accompagnent le début et la fin d'une précession.

Il suffit de rappeler que lors de la naissance d'un courant dans un circuit, l'énergie fournie (par la pile) se décompose en deux parties; l'une transformée immédiatement en chaleur par effet Joule, l'autre emmagasinée à l'état potentiel constituant l'énergie intrinsèque du courant; cette énergie se transforme à son tour en chaleur pendant l'extra-courant de rupture.

(*) Il suffit de se reporter aux figures 12 et 13. Les éléments correspondants de l'analogie sont indiqués ci-dessous :

a) Main droite. — Courant d'induction produit par une force extérieure → Précession produite par un couple déviateur :

Index : Champ magnétique → Moment cinétique.
Pouce : Force extérieure → Couple extérieur.
Médius : Courant d'induction → Précession.

b) Main gauche. — Réaction électromagnétique → Couple de réaction gyrostatique.

Index : Champ magnétique → Moment cinétique.
Médius : Courant → Précession forcée.
Pouce : Réaction mécanique → Couple de réaction.

L'analogie entre cet énoncé et les conclusions auxquelles conduit l'étude faite au n° 20 est évidente et nous dispense d'insister plus longuement.

Nous pousserons encore plus loin cette analogie. D'après la théorie moderne, un courant électrique peut être considéré comme un transport d'électrons libres (en particulier d'électrons négatifs) à travers les espaces interatomiques, sous l'influence d'un champ électrique.

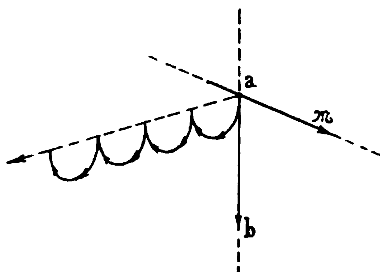


Figure 17.

Soit donc un champ électrique à lignes de forces verticales, une particule électrisée a dans ce champ se dirigera de a vers b créant ainsi un courant de déplacement ab (fig. 17). Supposons en même temps un champ magnétique dont les lignes de force perpendiculaires à ce courant sont dirigées suivant $\mathfrak{M}$.

Une particule portant une charge e, se déplaçant avec une vitesse v, produit les mêmes effets et subit les mêmes réactions qu'un courant d'intensité $i = ev$. Si on appelle m la masse matérielle de la particule on devra combiner les réactions électromagnétiques avec les réactions d'inertie ordinaire pour étudier le mouvement de la particule dans les deux champs simultanés. On démontre que le mouvement de la particule est une cycloïde dont la direction générale est normale à la fois au champ magnétique et au champ électrique (*). Il suffit de remplacer les expressions : champ électrique, champ magnétique, mouvement de la particule, respectivement par : Couple déviateur, moment cinétique et mouvement d'un point de l'axe, pour passer du cas de l'électron à celui de la précession tel qu'il a été étudié au n° 19; la comparaison des figures 16 et 17 est d'ailleurs suffisamment suggestive.

(*) A. Righi, *La Théorie moderne des Phénomènes physiques*, p. 102. — Bouasse, *Cours de Physique*, tome III, p. 232.

Nous sortirions de notre cadre en poussant plus loin cette comparaison et nous ne ferons que signaler l'hypothèse du champ gyrostatique formulée par Mac Cullagh et par Kelvin pour expliquer surtout des phénomènes d'optique (*).

Ce qui précède permet d'entrevoir le nombre énorme de phénomènes que peut envelopper l'analogie gyrostatique et l'on comprend le physicien qui va jusqu'à écrire : « Il ne peut y avoir pour le physicien, ni phlogistique, ni corpuscules, ni lumière, ni magnétisme, ni électricité, il n'y a que gyrostats et tourbillons vibrants » (**).

Avant de terminer ces généralités sur les phénomènes analogues à l'effet gyrostatique, notons encore une remarque qui se présente immédiatement à l'esprit lorsqu'on a fait quelques expériences au moyen de gyrostats; elle résulte d'ailleurs de ce qui en a été dit plus haut : *Un gyrostat se comporte comme s'il était formé de la juxtaposition d'un système constitué par sa masse propre et d'un système fictif, fonction de la rotation propre, qui lui confère une sorte de rigidité particulière, ou mieux, une inertie supplémentaire dans laquelle la masse réelle n'intervient pas.*

Cette façon d'envisager l'effet gyrostatique pourrait contribuer à faire disparaître des malentendus comme il s'en est produit récemment entre les ingénieurs et les physiciens au sujet des nouvelles théories émises sur l'électricité; les doctrines audacieuses des uns ont un instant semblé miner les principes de mécanique, appliqués et contrôlés tous les jours par les autres (***).

On a parlé de masse transversale différente de la masse longitudinale, ces deux masses n'étant égales à peu près que si les vitesses ne sont pas trop grandes, en un mot, la masse des corps serait variable avec la vitesse, et les conséquences auxquelles cela conduit sont encore plus inatten-

(*) CHIPART, *La Théorie gyrostatique de la lumière* (59).

(**) DE HEEN, *La Matière, sa naissance, sa vie, sa fin.*

(***) H. POINCARÉ, *La Dynamique de l'Election* (*Rev. Gén. des Sciences*, 1908, p. 386). — DWELSHAUWERS-DERY, *La Masse des corps est-elle variable ?* (*Ibid.*, 1908, p. 855.)

dues. Ces conceptions devaient pour le moins étonner ceux qui suivent journellement comme un dogme la mécanique de Galilée, de Huygens et de d'Alembert, et on s'explique qu'ils se soient montrés sceptiques.

Cependant les théories nouvelles comportent des hypothèses dont on peut tirer grand profit à condition de les admettre sans trop de prévention.

On a cherché des raisonnements judicieux pour dissiper les défiances du début. Il nous semble que l'effet gyrostatique peut être utilement invoqué à cette fin. On y trouve cet élément que nous venons d'appeler un système fictif, qui est fonction de la vitesse et qui joue le rôle de masse supplémentaire ; il fournit un exemple de faits mécaniques, réels et tangibles qui, à première vue, ne paraissent pas moins paradoxaux que certaines idées de ce que l'on a prématurément appelé la mécanique nouvelle.

II. — Etude complémentaire de la relation $C = J\Omega\omega$.

22. Démonstration directe du principe fondamental par le théorème de Coriolis. — On peut reprocher à la démonstration précédente, du principe fondamental de l'effet gyrostatique, d'être basée sur une approximation consistant à supposer confondus le vecteur du moment cinétique et l'axe matériel du gyrostat, nous démontrerons la même propriété, d'une manière qui peut sembler plus directe, en utilisant le théorème de Coriolis et nous verrons plus loin (n° 24) ce qu'il faut penser de la valeur des deux démonstrations.

Considérons un disque de rayon R (fig. 18) animé autour de son axe de figure OO′ d'une vitesse angulaire Ω, supposons-le entraîné en même temps dans un mouvement de rotation de vitesse ω autour de l'axe horizontal AD. En appelant m_1 la masse de l'unité de surface du disque, la masse élémentaire sera représentée par l'expression

$$dm = m_1 r d\varphi \,.\, dr$$

l'angle φ est compté dans le sens du mouvement Ω à partir du rayon horizontal OA.

En l'absence de forces extérieures, les réactions du système sur ses appuis se réduiront aux réactions d'inertie produites sur chacune des masses élémentaires par l'accélération totale, somme géométrique de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération complémentaire (théorème de Coriolis).

Les deux premières, puisqu'il n'y a pas de translation,

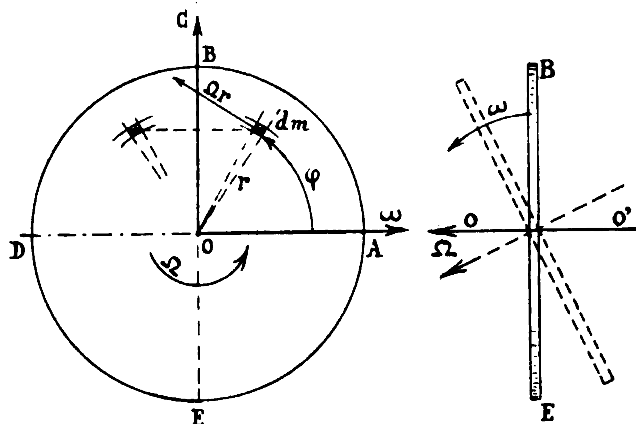


Figure 18.

et que les rotations Ω et ω sont uniformes, se réduisent aux accélérations centripètes :

$$dm\Omega^2 r \quad \text{et} \quad dm\omega^2 r \sin\varphi$$

qui donnent lieu à des réactions d'inertie ne sortant pas du plan du disque, elles se détruisent deux à deux et ne devraient intervenir que dans l'étude de sa résistance.

La troisième, l'accélération complémentaire (ou centrifuge composée) est égale au double du produit vectoriel de la rotation d'entraînement par la vitesse relative. Elle sera donc dirigée normalement au vecteur de la rotation $\overline{\omega}$ et à la direction de la vitesse relative $\overline{\Omega r}$, son sens sera tel que le vecteur $\overline{\omega}$ paraisse entraîné par $\overline{\Omega r}$ dans le sens des rotations positives, c'est-à-dire que pour la masse *dm* de la

figure 18, l'accélération complémentaire sera dirigee normalement au disque et de l'avant vers l'arrière du dessin. La réaction d'inertie correspondante sera dirigée de l'arrière vers l'avant du dessin et aura pour grandeur

$$df = 2dm \,.\, \omega \,.\, \Omega r \cos \varphi \,. \qquad (38)$$

Il est facile de reconnaître que les forces df seront dirigées de l'arrière vers l'avant du dessin pour toutes les masses élémentaires des quadrants AB et AE, et en sens inverse pour toutes les masses des quadrants BD et DE, de plus, les forces df appliquées à deux masses élémentaires symétriques par rapport à BE sont égales.

En intégrant, pour les deux demi-circonférences BAE et BDE, on trouverait donc deux forces égales et contraires donnant lieu à un couple représenté par un vecteur dirigé suivant le diamètre BE et dont le sens est indiqué par la flèche OC.

Le calcul du couple se fait simplement :

$$dC = 2 \,.\, df r \cos\varphi = 4dm \, \Omega\omega \, r^2 \cos^2 \varphi$$
$$= 4m_1 \Omega\omega r^3 dr \,.\, \cos^2 \varphi d\varphi \,.$$

$$C = \int_o^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dC = 4m_1 \Omega\omega \int_o^R r^3 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} . \cos^2\varphi \, d\varphi$$

$$C = \frac{\pi R^4 m_1}{2} \,.\, \Omega \,.\, \omega = J\Omega\omega \,. \qquad (30)$$

Nous retrouvons la grandeur du couple de réaction gyrostatique dû à la précession forcée, et le sens de ce couple, tel que l'indique la figure 18, est bien celui auquel conduit la règle des trois doigts (main gauche).

Cette démonstration doit être complétée par les remarques suivantes :

1°) Si l'axe de rotation d'entraînement, au lieu d'être confondu avec un des diamètres du disque, lui est parallèle, ce changement d'axe a pour seul effet de faire appa-

raître une réaction d'inertie appliquée au centre de gravité, mais rien n'est changé aux mouvements de rotation considérés. L'expression du couple C reste applicable et la proposition peut par conséquent s'étendre au cas d'un solide de révolution, qui peut être décomposé en une série de disques circulaires infiniment minces disposés parallèlement.

2°) On peut également étendre la proposition au cas d'un solide dont l'ellipsoïde d'inertie est de révolution pour les points de l'axe de la rotation propre Ω. En effet, nous pouvons écrire la valeur du moment exercé par rapport à la verticale BE, par la réaction appliquée à une masse élémentaire

$$dC' = df \, . \, r \cos \varphi = \Omega\omega \, . \, 2r^2 \cos^2 \varphi \, dm \, .$$

ce qui permet d'écrire pour le couple total à l'instant considéré

$$C' = \Omega\omega 2 \int r^2 \cos^2 \varphi \, dm = \Omega\omega \, . \, 2I \, . \qquad (39)$$

I représente le moment d'inertie du solide par rapport au plan passant par l'axe de la rotation Ω et par la droite BE. Nous pouvons déduire de cette expression — applicable à un solide quelconque — que le couple C′ sera constant si le moment d'inertie du solide reste le même par rapport à tous les plans du solide, contenant l'axe Ω, qui passeront successivement par la direction BE. Cette condition ne sera remplie que si l'ellipsoïde d'inertie du solide est de révolution par rapport à l'axe OO′; dans ce cas on a $2I = J$ et la relation (39) se confond avec (30).

3°) Si, ni le solide, ni son ellipsoïde d'inertie ne sont de révolution autour de l'axe de la rotation propre, une rotation d'entraînement normale à la rotation propre donnera lieu à un couple de réaction analogue au couple gyrostatique mais qui ne sera constant ni en grandeur ni en direction.

En effet, la relation (39) ci-dessus indique que le couple qui s'exerce autour de la direction normale à la fois à Ω et à ω, suit les variations du moment d'inertie I du système par

rapport à cette direction, et d'autre part la symétrie ne pouvant pas plus exister par rapport à AD que par rapport à BE, les forces de Coriolis produiront un second couple autour de AD qui tendra alternativement à ralentir et à accélérer la rotation ω.

Cette remarque devant trouver son application dans certains appareils mécaniques, (ailes d'hélices, rais de roues, etc.) nous étudierons ce couple « pseudo-gyrostatique » dans deux cas particuliers.

23. Cas particuliers. — Pseudo-gyrostats.

1°) Cas d'un disque incomplet réduit à deux secteurs

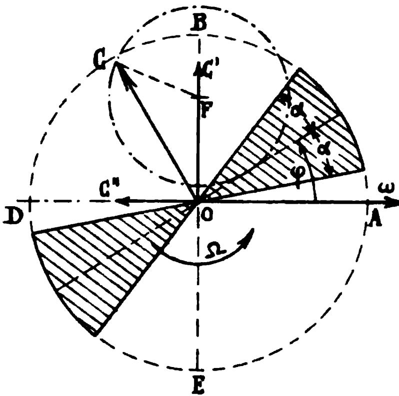


Figure 19.

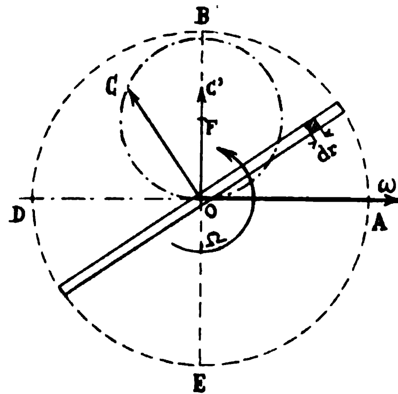


Figure 20.

égaux opposés par le sommet et correspondant chacun à un angle 2α (fig. 19). En reprenant les notations du numéro précédent, la force appliquée à chaque élément de masse sera exprimée par :

$$df = 2dm\omega\Omega r \cos\varphi = 2m_1\Omega\omega r^2 dr \, . \cos\varphi d\varphi$$

Cette force est dirigée de l'arrière vers l'avant dans le demi-cercle EAB et de l'avant vers l'arrière dans BDE ; de plus, la forme df a la même grandeur pour deux masses élémentaires symétriques par rapport au point O.

Les deux vecteurs, couverts de hachures, donneront lieu à deux réactions résultantes égales et de sens opposés et

par suite à un couple dont le vecteur représentatif OC est variable en grandeur et en direction.

Supposons ce couple C décomposé en deux C′ et C″, le premier suivant OB, direction qu'aurait le couple gyrostatique s'il s'agissait d'un disque complet, le second dirigé suivant l'axe de la rotation d'entraînement.

On trouve facilement :

$$dC' = 2df\,r\cos\varphi = 4m_1\Omega\omega r^3 dr\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$C' = 4m_1\Omega\omega\int_0^R r^3 dr\int_{\varphi-\alpha}^{\varphi+\alpha}\cos^2\varphi\,d\varphi = m_1 R^4\Omega\omega\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\,.\,\cos 2\varphi\right)$$

$$dC'' = 2df\,r\sin\varphi = 4m_1\Omega\omega r^3 dr\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi$$

$$C'' = 4m_1\Omega\omega\int_0^R r^3 dr\int_{\varphi-\alpha}^{\varphi+\alpha}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = m_1 R^4\Omega\omega\frac{1}{2}\sin 2\alpha\sin 2\varphi$$

Ces expressions se simplifient en introduisant la valeur du moment d'inertie polaire j de l'ensemble des deux secteurs considérés, par rapport à l'axe de rotation OO′ :

$$j = m_1 R^4\alpha\,.$$

On trouve alors

$$C' = j\Omega\omega\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\cos 2\varphi\right) \qquad (40)$$

$$C'' = j\Omega\omega\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\sin 2\varphi \qquad (41)$$

Il est facile de reconnaître que l'extrémité du vecteur OC (fig. 19), défini par

$$\overline{C} = \overline{C'} + \overline{C''}$$

a pour lieu géométrique un cercle de rayon $j\Omega\omega\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$ situé dans le plan de la rotation propre; son centre F se trouve sur la normale commune aux deux rotations Ω et

ω, à une distance OF $= j\Omega\omega$, l'extrémité du vecteur OC parcourt ce cercle avec une vitesse angulaire 2Ω.

Le couple de réaction gyrostatique qui se produit autour de OB, au lieu d'avoir une grandeur constante comme dans le cas du disque complet, devient ici un couple de nature pulsatoire dont la grandeur oscille entre les limites

$$J\Omega\omega\left(1 \pm \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right),$$

avec une fréquence égale au double du nombre de tours par unité de temps.

On peut dire aussi que le couple C' se compose d'une partie fixe et d'une partie variable, cette dernière étant d'autant moins importante que les secteurs seront plus arges et que leur ensemble se rapprochera du cercle complet.

Comme vérification, supposons que les secteurs s'élargissent jusqu'à former un cercle complet, il suffit pour cela de faire $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dans les formules (40) et (41). On voit alors que les termes périodiques s'annulent, C'' disparaît et on retrouve pour C' la valeur $C = J\Omega\omega$ indépendante de φ.

2°) Un autre cas particulier intéressant est celui d'une tige de section constante tournant autour de son centre de gravité O avec une vitesse angulaire Ω, dans un plan ABDE (fig. 20), et entraînée en même temps dans une rotation ω autour de AD.

Soit 2R la longueur de la tige et m_1 sa masse par unité de longueur, nous supposons sa largeur négligeable, la masse d'un élément de tige sera

$$dm = m_1 dr .$$

Nous ne nous occupons pas des réactions d'inertie qui s'exercent dans le plan ABDE et qui n'intéressent que la résistance de la tige, mais seulement des réactions dues à l'accélération complémentaire qui sont normales à ce plan. Nous trouverons comme précédemment, équation (38) :

$$df = 2dm\,\Omega\omega\, r \cos\varphi = 2m_1\,\Omega\omega \cos\varphi\, rdr .$$

Les deux moitiés de la tige donneront lieu à deux réactions résultantes égales et de sens contraire, et par suite à un couple dont l'axe OC sera à chaque instant perpendiculaire à la tige.

Ce couple a pour valeur :

$$C = \int_o^R 2r df = \frac{4}{3} m_1 R^3 \Omega\omega \cos\varphi ,$$

et en remarquant que $\frac{2}{3} m_1 R^3 = j$, moment d'inertie de la tige par rapport à son milieu :

$$C = 2j\Omega\omega \cos\varphi . \qquad (42)$$

Le lieu géométrique de l'extrémité du vecteur OC est un cercle de diamètre $2j\Omega\omega$, tangent à AD en O, comme l'indique la figure.

Quant au couple de réaction gyrostatique estimé par rapport à OB, perpendiculaire commune aux rotations Ω et ω, il a pour expression :

$$C' = 2j\,\Omega\omega \cos^2\varphi . \qquad (43)$$

il varie deux fois par tour de 0 à $2j\Omega\omega$.

Ce couple a sa plus grande valeur à l'instant où la tige passe par la direction de la rotation ω; on remarquera que cette valeur est deux fois plus grande que si au lieu d'une tige on avait un disque de même moment d'inertie j.

3°) Une hélice propulsive à deux ailes peut être considérée comme la réunion d'une série de tiges élémentaires enfilées par leur milieu sur un même axe et faisant entre elles des angles $d\varphi$. Les résultats précédents permettraient de trouver le couple pseudo-gyrostatique dû à un tel système; sans faire l'analyse complète on se rend compte que le résultat sera intermédiaire entre ceux auxquels on serait conduit pour une tige unique et pour un groupe de deux secteurs.

Dans le cas où la largeur des ailes est faible on peut admettre comme très approchée la formule

$$C = 2j\,\Omega\omega \cos^2\varphi . \qquad (43)$$

Il est à peine besoin de remarquer que dans le cas d'une hélice à trois ailes ou plus, le système devient un gyrostat parfait et donne lieu à un couple constant en grandeur et en direction.

24. Remarques sur la valeur des deux démonstrations précédentes de la relation $C = J\Omega\omega$. — La même expression $C = J\Omega\omega$ a été trouvée pour la valeur du couple de réaction gyrostatique, par deux méthodes tout à fait indépendantes aux numéros 13 et 22. Il peut sembler étrange que la seconde démonstration, basée sur le théorème de Coriolis, conduise par une marche rigoureuse à un résultat considéré au n° 13 comme une approximation.

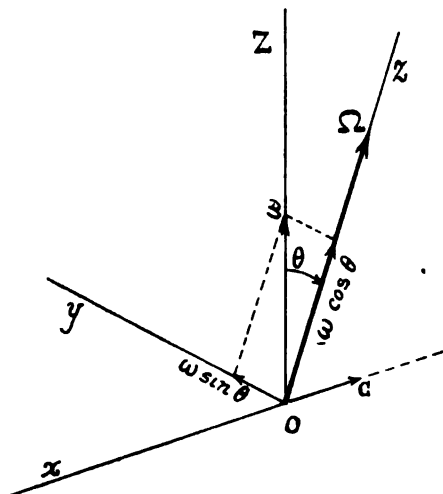


Figure 21.

La démonstration suivante, d'un caractère plus général, permet d'expliquer cette apparente contradiction.

Considérons (fig. 21) un gyrostat fixé par un point O de son axe, animé d'une vitesse angulaire propre Ω, et entraîné dans un mouvement de précession uniforme de vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe OZ ; l'angle θ de l'axe du gyrostat avec OZ restera donc constant pendant la durée du mouvement.

Cherchons les réactions d'inertie exercées par le système; en d'autres termes, quels seraient, pris en signe contraire, les couples extérieurs qui devraient lui être appliqués pour entretenir le mouvement ω. Faisons abstraction de la pesanteur, ou supposons que le centre de gravité se trouve en O.

Suivons la marche indiquée au n° 15, pour être précis, tenons compte de la remarque du n° 16 et utilisons les équations (15).

Choisissons trois axes *oxyz* coïncidant avec les directions principales d'inertie en O, l'axe *oz* sera dirigé suivant l'axe de révolution, le plan *yoz* sera le plan qui contient *oz* et OZ; l'axe *ox*, par suite, sera perpendiculaire à la fois à OZ et à *oz*.

Pendant le mouvement, le plan *yoz* tournera autour de OZ et l'axe *ox* décrira un plan perpendiculaire à OZ.

Les rotations du système, estimées à chaque instant autour des axes mobiles, seront, en faisant abstraction de la rotation du gyrostat :

$$\omega_x = 0$$
$$\omega_y = \omega \sin \theta$$
$$\omega_z = \omega \cos \theta \, .$$

Si J est le moment d'inertie du système autour de *oz* et I son moment d'inertie autour d'un diamètre quelconque de l'équateur de l'ellipsoïde d'inertie en O, nous aurons pour les composantes du moment cinétique

$$\mathfrak{M}_x = 0$$
$$\mathfrak{M}_y = \mathrm{I}\omega \sin \theta$$
$$\mathfrak{M}_z = \mathrm{J}(\Omega + \omega \cos \theta) \, .$$

Les vitesses de rotation du système étant constantes par hypothèse, les termes en $d\mathfrak{M}$ ou $\frac{d\omega}{dt}$ des équations (15) disparaissent et la première d'entre elles qui subsiste seule se réduit à :

$$\mathfrak{M}_z \omega_y - \mathfrak{M}_y \omega_z = C_x$$

ce qui donne :

$$C = J\,(\Omega + \omega \cos \theta)\, \omega \sin \theta - I\omega^2 \sin \theta \cos \theta \, . \qquad (44)$$

Ou encore :

$$C = J\Omega\omega \sin \theta + (J - I)\, \omega^2 \sin \theta \cos \theta \;(^*) \, . \qquad (45)$$

(*) On trouve la même relation par une voie plus classique en partant des équations d'Euler (16) (17) (18) et des trois relations cinématiques (19) (20) (21), chapitre I, n° 6.

Il suffit pour cela d'éliminer $\omega_x\ \omega_y\ \omega_z$ entre ces six équations en remarquant que $\frac{d\psi}{dt} = \omega$, $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$ et θ sont des constantes.

Le couple de réaction cherché, égal et de signe contraire à C, sera donc dirigé suivant l'axe *ox* normal à la fois aux axes des deux rotations Ω et ω.

L'équation (45) indique que C se compose de deux couples :

1°) Un couple $J\Omega\omega \sin\theta$, égal au produit du moment cinétique du gyrostat par la composante de la rotation d'entraînement normale à son axe de figure. C'est donc le *couple de réaction gyrostatique* que nous aurions exprimé directement en appliquant la formule :

$$C = J\Omega\omega \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_z \cos\theta\,.$$

2°) Un couple $(J - I)\,\omega^2 \sin\theta \cos\theta$, indépendant de la rotation propre Ω, qui n'est autre que le *moment centrifuge* dû à la rotation ω, et *qui se produirait aussi bien pour un solide quelconque que pour un gyrostat*. En effet, le moment centrifuge est égal au produit, par la rotation instantanée, de la composante du moment cinétique normale à cette rotation (n° 5). Le moment cinétique dû à ω se décompose ici en $J\omega \cos\theta$ et $I\omega \sin\theta$, la somme géométrique de ces deux vecteurs projetée sur une normale à ω donne $(J - I)\,\omega \sin\theta \cos\theta$, ce qui multiplié par ω, reproduit bien le deuxième terme du couple C.

Le couple C donné par l'équation (45) se réduit à son premier terme dans trois cas particuliers :

Premier cas. — Si $J = I$, l'ellipsoïde d'inertie se réduit à une sphère et le moment centrifuge ne se fait pas sentir — c'est un cas exceptionnel.

Deuxième cas. — Si la vitesse angulaire Ω est très grande comparativement à ω, le second terme est négligeable vis-à-vis du premier.

Troisième cas. — Si $\theta = 90°$, le terme du moment centrifuge s'annule et le premier se réduit au produit $J\Omega\omega$.

Dans la méthode d'exposition adoptée au n° 13 pour établir la valeur du couple de réaction gyrostatique, on a eu soin de se limiter aux systèmes rentrant dans la définition des gyrostats pour lesquels les composantes du

moment cinétique dues à d'autres vitesses que Ω peuvent être négligées. On s'est donc placé dans le second cas de la discussion ci-dessus.

Dans la démonstration directe du n° 22, on n'a fait aucune hypothèse sur la grandeur de Ω et l'on est arrivé au même résultat ; mais on a précisément choisi $\bar{\omega}$ normal à $\bar{\Omega}$ ($\theta = 90°$), c'est-à-dire que l'on s'est placé dans le troisième cas de la discussion précédente.

Nos deux démonstrations sont donc également valables.

25. Enoncé et critique de différentes explications et démonstrations élémentaires de l'effet gyrostatique. — L'effet gyrostatique, que l'on observe si facilement au moyen de la toupie, devait provoquer la recherche d'explications élémentaires et dans cet ordre d'idées, le désir d'éviter les difficultés que présentent les méthodes rigoureuses a conduit à des notions souvent inexactes et à des solutions dont plusieurs sont fort peu satisfaisantes.

La marche suivie au n° 13 évite ces deux écueils. Elle ne peut, il est vrai, être exposée sans avoir fait au préalable certaines restrictions, mais c'est là, croyons-nous, le mérite de cette méthode d'exposition qui oblige ainsi à se rappeler que l'effet gyrostatique ne se manifeste que dans des conditions particulières : ellipsoïde d'inertie de révolution, et grande vitesse angulaire.

La deuxième démonstration, que nous avons donnée au n° 22, pourrait être appelée élémentaire ; cependant, les auteurs qui ont cherché à donner de l'effet gyrostatique une explication simple n'y ont pas eu recours, ils semblent avoir cherché à éviter de supposer connu le théorème de Coriolis.

Une explication assez courante des phénomènes que présentent les gyrostats est la suivante :

Un disque (fig. 22) est animé de la rotation Ω autour de son axe et entraîné dans une rotation ω autour du diamètre AD, vertical dans le cas de la figure.

Considérons une molécule du disque pendant que la rotation ω la transporte de A en B, la vitesse horizontale

que lui communique la rotation ω augmente de zéro jusqu'à ωr en même temps que sa vitesse Ωr est déviée. Il résulte de là une réaction d'inertie qui tend à pousser le disque dans le sens de la flèche df.

Par le même raisonnement, on trouve que toutes les molécules exerceront des réactions analogues perpendiculaires au disque, mais dont le sens, indiqué par les flèches df de la figure, dépend du quadrant dans lequel elles se trouvent.

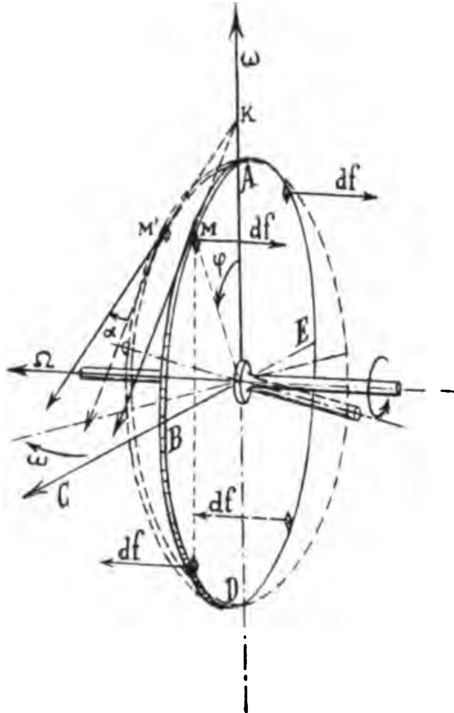


Figure 22.

Si l'on envisage l'ensemble des molécules du disque, on voit facilement que les réactions df sont égales et opposées pour des molécules prises deux à deux de part et d'autre du diamètre BE. D'où le couple résultant C agissant autour d'un axe BE, normal à la fois aux deux directions Ω et ω.

Cette explication a été donnée pour la première fois par Poggendorf (*21*), elle est purement qualitative.

En partant des mêmes considérations on a cependant cherché à chiffrer la valeur du couple C en opérant de la manière suivante :

La vitesse linéaire d'un élément de masse *dm*, dans sa rotation autour de l'axe vertical BD, est, en se reportant aux notations du n° 22 et des fig. 18 et 22 :

$$v = \omega r \sin \varphi \qquad \frac{dv}{dt} = \omega r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \,.$$

La réaction d'inertie df exercée par l'élément de masse normalement au disque est :

$$df_1 = dm \frac{dv}{dt}$$

et le couple élémentaire produit par deux molécules symétriques par rapport à DE sera :

$$dc = dm \frac{dv}{dt} \,.\, 2r \cos \varphi \,.$$

En faisant comme au n° 22, $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$ et $dm = m_1 r d\varphi dr$, les deux expressions précédentes peuvent s'écrire :

$$df_1 = dm \,.\, \Omega\omega r \cos \varphi \qquad (46)$$

$$dc = 2m_1 \Omega\omega r^3 \cos^2 \varphi d\varphi \,.\, dr \,.$$

En intégrant cette dernière expression de o à π et de o à R on obtient :

$$C = \frac{\pi}{4} m_1 R^4 \Omega\omega = \frac{J}{2} \Omega\omega \,.$$

C'est un résultat deux fois trop faible parce qu'il ne tient compte que de l'une des deux causes des réactions d'inertie des molécules du disque. Cette manière d'évaluer le couple a été indiquée par Hirn (*30*) et souvent reproduite depuis, notamment par Duchesne (*65*).

Jouffret (*32*), dans un mémoire d'une rare élégance, est arrivé à une solution exacte en partant de considérations analogues. La pression d'une molécule du disque supposée isolée (fig. 22) se compose en effet de deux parties : la première df_1 provient des variations de la vitesse v (force unique considérée par Hirn) ; la seconde partie df_2 est due au changement de direction de la vitesse Ωr.

La déviation de la direction de la vitesse Ωr peut se décomposer en un changement de direction dans le plan du disque (qui ne produira aucun effet sortant de ce plan), et un changement de direction mesuré par l'angle MKM', dont le plan est normal au disque, et qui donne lieu à une réac-

tion d'inertie normale df_2 de même sens que df_1. Si $d\alpha$ est la déviation subie pendant le temps dt on aura :

$$df_2 = dm \,.\, \Omega r \,.\, \frac{d\alpha}{dt}\,.$$

En remarquant que $\frac{d\alpha}{dt} = \omega \cos \varphi$ on trouve :

$$df_2 = dm \,.\, \Omega\omega r \cos \varphi\,. \qquad (47)$$

En comparant les relations (46) et (47) on conclut que la force élémentaire df_2 due à la déviation est égale à la force df_1 due à l'accélération latérale. En adoptant pour le calcul du couple une force élémentaire :

$$df = df_1 + df_2 = 2df_1\,,$$

Jouffret arrive évidemment à un résultat deux fois plus grand que celui de Hirn :

$$C = \frac{\pi}{2} m_1 R^4 \Omega\omega = J\Omega\omega\,. \qquad (30)$$

Observons que la force élémentaire $df = df_1 + df_2$ ne diffère pas de celle que nous avons obtenue au n° 22 équation (38); la démonstration très frappante de Jouffret, reprise dans une note récente de Fuchs et Katzmayr (*91*), revient en somme à appliquer le théorème de Coriolis sans le dire.

Il faudrait citer encore d'autres explications élémentaires, qui ont été souvent reproduites; elles constituent toutes des interprétations qualitatives plutôt que des démonstrations et sont en général basées sur un théorème qui n'a qu'une portée cinématique, le théorème de la composition, ou du parallélogramme, des rotations.

Voici à peu près comment Foucault (*11*) rendait compte du phénomène dont il a tiré un si merveilleux parti : La tendance de l'axe du tore à se rapprocher de l'axe de la rotation supplémentaire que l'on tend à lui imposer (couple déviateur ou rotation d'entraînement, Cf. n° 14) tient à ce fait que la rotation actuelle Ω du corps et la rotation d'en-

traînement ω à laquelle il participe, se composent suivant la loi du parallélogramme en une rotation dont l'axe se rapproche constamment de l'axe du mouvement d'entraînement.

Cette démonstration ne peut être admise comme correcte; elle est basée sur une confusion entre l'axe de la rotation actuelle et l'axe résultant qui est l'axe instantané de rotation.

En effet, dès que la rotation ω apparaît, l'axe matériel du tore change de direction, il cesse d'être immobile et ne peut donc être axe instantané; le véritable axe instantané s'établira entre les deux vecteurs Ω et ω suivant la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux longueurs; dès lors l'axe matériel du tore tournerait autour du vecteur résultant et sortirait du plan défini par les positions initiales de Ω et de ω au lieu de rester dans ce plan comme le dit l'énoncé de Foucault et comme les faits le confirment.

Cette démonstration, adoptée également par Sire (*24*), contemporain et émule de Foucault, est donc fort peu satisfaisante. Elle a néanmoins séduit par sa simplicité et a été fréquemment reproduite; Perry (*53*) n'a pas hésité à y recourir dans son intéressant ouvrage de vulgarisation.

III. — Applications immédiates du théorème fondamental de l'effet gyrostatique a divers exemples.

26. Turbines et dynamos installées a bord des navires. — De nombreuses pièces de machines, induits de dynamos, rotors de turbines, ventilateurs, etc., animées de vitesses de rotation considérables, sont de véritables gyrostats. Si une de ces pièces se trouve à bord d'un navire, les déplacements angulaires de l'ensemble du bâtiment agissent comme des précessions forcées et font naître des réactions sur les supports, et, dans les axes, des efforts de flexion dont il convient de tenir compte.

Les mouvements du navire ayant le caractère de déplacements angulaires sont le roulis, le tangage et les changements de cap pendant les évolutions; le premier des trois donne lieu aux vitesses les plus grandes.

On peut admettre qu'un navire de qualités nautiques ordinaires s'incline de part et d'autre de la verticale de 15° environ (0,262 radian), la période complète du roulis variant de 5 à 10 secondes. L'oscillation ayant un caractère pendulaire, la plus grande vitesse angulaire est donnée par la relation

$$\omega = \frac{2\pi\Phi}{T} .$$

Ce qui donne en admettant $\Phi = 0,262$ et $T = 5$ sec :

$$\omega = 0,329 \text{ rad/sec} .$$

Supposons une turbine à vapeur dont les disques pèsent 100 kilos, tournant à 3000 tours par minute, placée à bord du navire, son axe étant disposé transversalement; le roulis agira comme un mouvement de précession dans un plan transversal et provoquera un couple de réaction gyrostatique dans un plan horizontal.

Le moment d'inertie J des disques peut être évalué à 0,920 km^2/g, $\Omega = 314$ rad/sec., en prenant $\omega = 0,329$ valeur admise plus haut, on trouve :

$$C = J\Omega\omega = 0,920 \times 314 \times 0,329 = 95 \text{ kg. m.}$$

Ce couple se manifeste sur les paliers par des réactions horizontales comparables en grandeur à celles résultant du poids propre, et qui changent de sens à chaque coup de roulis. Ajoutons que le couple C dont le plan est invariable est transmis aux paliers par l'arbre qui tourne sur lui-même, ce dernier est donc soumis à un moment fléchissant alternatif, changeant de sens 3000 fois par minute dans l'exemple choisi.

Ce qui vient d'être dit des turbines, est applicable aux induits des dynamos, et explique les ruptures d'arbres fréquemment constatées au début de l'installation, à bord des navires, des petites turbo-dynamos d'éclairage. Le

remède consiste à placer l'arbre des dynamos et les turbines parallèlement à l'axe longitudinal du navire; les effets du roulis ne se font alors plus sentir; quant au tangage et aux évolutions ils donnent lieu à des vitesses angulaires beaucoup plus faibles.

Le tangage et les changements de cap peuvent cependant provoquer des réactions gyrostatiques appréciables dans les turbines propulsives dont l'axe est disposé dans le sens longitudinal, mais dont les masses tournantes sont généralement considérables.

Un fort tangage est par exemple celui qui établit une dénivellation de 9 mètres entre l'avant et l'arrière d'un bateau de 100 mètres, avec une période courante de 7 sec, cela conduit à une vitesse angulaire maximum de 0,078 rad/sec.

Une évolution rapide produit un effet analogue, par exemple une gyration de 180° exécutée en 45 secondes correspond à une vitesse angulaire de 0,07 rad/sec.

Calculons les réactions gyrostatiques produites par une précession forcée de vitesse angulaire égale à 0,07 rad/sec. sur une turbine motrice. Supposons un rotor pesant 2,800 kilos avec un moment d'inertie J = 980 k/g. m², tournant à 500 tours (52,4 rad/sec) (Dimensions approximatives d'une turbine de haute pression d'un paquebot de la Manche), on trouve :

$$C = J\Omega\omega = 980 \times 52,4 \times 0,07 = 3590 \text{ kg.m.}$$

Les paliers étant distants de 4,25 m. cela correspond à une force de 845 kilos sur chacun d'eux; ces forces sont verticales et constantes dans le cas d'un virage, horizontales et alternatives dans le cas du tangage.

S'il y a deux turbines parallèles tournant en sens inverse et présentant des produits $J\Omega$ égaux, les effets se compensent et il n'en peut résulter que des efforts intérieurs agissant sur le carlingage général des machines.

En tous cas, si les effets gyrostatiques dans les navires à turbines sont sensibles pour les paliers, ils ne peuvent être dangereux pour la coque du navire que si les fonds de

celui-ci sont établis dans des conditions de légèreté inaccoutumées (*).

27. Roues des navires a aubes. — Les roues d'un bâtiment à aubes peuvent être considérées comme deux volants calés sur un même arbre transversal au navire. Ici la vitesse angulaire est modérée, mais la masse importante des roues donne néanmoins au produit $J\Omega$ une valeur élevée.

Par exemple, dans le cas des paquebots de l'Etat belge, type « Marie-Henriette », le poids de chaque roue est d'environ 50 tonnes et le moment d'inertie $J = 32100$ k/g m², la vitesse angulaire $\Omega = 5{,}24$ rad/sec (50 tours par minute), soit $J\Omega = 168000$ pour chaque roue.

Le tangage consistant en un balancement autour d'un axe transversal n'entraînera aucun effet gyrostatique, mais pendant les évolutions, dans le plan horizontal, il se manifestera un couple transversal tendant à incliner le navire.

On reconnaît facilement par la règle des trois doigts que l'inclinaison se produit sur bâbord lorsque l'évolution se fait vers tribord et réciproquement; c'est-à-dire que le couple gyrostatique aura pour effet d'incliner la mâture en dehors du cercle de gyration. D'autres causes, inhérentes à la construction même des navires, peuvent produire une inclinaison dans le même sens, néanmoins il paraît reconnu que cet effet est plus marqué pour les bateaux à aubes que pour ceux à hélices.

En admettant comme au nº 26 une vitesse de gyration

(*) Le *Viper* et le *Cobra*, les deux premiers torpilleurs de haute mer munis de turbines Parsons périrent, à quelques semaines d'intervalle, très peu de temps après leur mise en service, en 1901, dans des conditions qui n'ont pu être bien précisées. Cette double catastrophe, attribuée à la faiblesse de la coque et, à tort semble-t-il, à l'effet gyrostatique, fit l'objet de longues polémiques dans la presse technique anglaise. Dans *Engineering*, (1901, 2me semestre), on ne trouve pas moins de vingt-six lettres émanant de techniciens avertis, et l'on est étonné des notions étranges et inexactes de la plupart d'entre eux, sur le phénomène gyroscopique. (Voir Bibliographie, *68*.)

$\omega = 0,07$ rad/sec on trouve pour le paquebot envisagé plus haut un couple inclinant

$$C = J\Omega\omega = 2 \times 168000 \times 0,07 = 23500 \text{ kg.m.}$$

capable de produire une inclinaison de 1,2° environ.

Les effets du roulis sont plus importants. Pendant chaque demi-oscillation les roues exercent un couple de réaction gyrostatique horizontal. La coque est donc soumise à un moment horizontal, alternatif comme le mouvement de roulis lui-même, qui tend à produire un mouvement de lacet. Ce mouvement périodique est amorti par l'inertie du navire et la résistance de l'eau, mais le couple n'en est pas moins transmis à la coque par l'intermédiaire des arbres porte-roues qui se trouvent par ce fait soumis à des efforts de flexion horizontaux.

On peut se faire une idée de l'importance de ces efforts dans le cas de l'exemple précédent, en admettant pour la vitesse angulaire de roulis la valeur $\omega = 0,329$ trouvée au n° 26. On obtient ainsi

$$C = J\Omega\omega = 168000 \times 0,329 = 55000 \text{ kg.m.}$$

C'est un couple à caractère alternatif qui développe dans le métal de l'arbre des efforts de flexion comparables à ceux résultant des autres états de sollicitation de cette pièce. Si l'on note que les arbres porte-roues périssent par la fatigue due à la répétition des efforts alternatifs, on peut ajouter que l'effet gyrostatique, qui n'a jamais été envisagé dans les calculs, constitue un facteur important de l'affaiblissement graduel de ces pièces.

28. COUPLE GYROSTATIQUE PERTURBATEUR DANS LES AUTOMOBILES. — Dans la disposition habituelle des voitures automobiles, l'arbre moteur est disposé longitudinalement et porte un volant qui tourne dans le sens positif lorsqu'on regarde dans le sens de la marche en avant.

Pendant les virages, le volant subit une précession forcée et exerce un moment de réaction gyrostatique dans le plan vertical passant par l'axe. Ce couple, qui tend à soulager l'un des essieux et à surcharger l'autre, est trans-

mis du volant au châssis par l'intermédiaire de l'arbre qui se trouve soumis par ce fait à un effort de flexion.

Soit par exemple une voiture de type courant avec un volant de 55 kilos ($J = 0{,}211$ k/g. m²) tournant à 1.200 tours par minute ($\Omega = 125{,}6$ rad/sec). Supposons une courbe de 50 mètres de rayon parcourue à la vitesse de 36 kilomètres à l'heure, ce qui correspond à une vitesse angulaire d'entraînement $\omega = 0{,}167$ rad/sec.

$$C = J\Omega\omega = 0{,}211 \times 125{,}6 \times 0{,}167 = 4425 \text{ kg. m.}$$

L'influence de ce couple sur les essieux et les ressorts de suspension est insignifiant, et l'effort de flexion supplémentaire qui en résulte pour l'arbre est très faible. Ces effets deviennent beaucoup plus sérieux dans le cas du dérapage; on peut en effet, sans exagérer, admettre que la voiture exécute un « tête à queue » en une seconde, ce qui conduit à $\omega = 3.14$ rad sec, et à :

$$C = 0{,}211 \times 125{,}6 \times 3{,}14 = 83{,}3 \text{ kg. m.}$$

Cela conduit pour la charge du métal à la flexion, en prenant un arbre de 40 millimètres de diamètre, à :

$$t = \frac{Cv}{I} = \frac{8330 \times 32}{\pi \cdot 4^3} = 1325 \text{ kg/cm}^2 .$$

C'est un effort accidentel, supplémentaire, à caractère alternatif (puisque l'arbre tourne sur lui-même), avec lequel il est prudent de compter.

29. Conséquences de l'effet gyrostatique sur le matériel des chemins de fer. — Chaque essieu du matériel roulant, avec ses deux roues, constitue un gyrostat dont la rotation est déterminée à chaque instant par la vitesse du train. Tout mouvement du véhicule produisant une déviation de l'essieu dans un plan horizontal ou dans un plan vertical provoquera l'apparition d'un couple de réaction gyrostatique dans un plan perpendiculaire.

Le premier cas à considérer est celui du véhicule circulant en courbe ; il est facile de reconnaître que le couple gyrostatique produit tend à renverser le véhicule en dehors

de la courbe et crée une pesée supplémentaire sur le rail extérieur en réduisant la pression sur le rail intérieur.

L'expression du couple peut être mise ici sous une forme un peu plus particulière.

Appelons R le rayon de courbure de la voie;
r le rayon de roulement des roues;
m' la masse d'une roue « ramenée à la jante »;
V la vitesse du train.

On aura alors : $J = m'r^2$, $\Omega = \frac{V}{r}$, $\omega = \frac{V}{R}$,

$$C_g = m'r\frac{V^2}{R}. \tag{48}$$

Expression analogue à celle du couple de renversement C_c dû à la réaction d'inertie centrifuge. Si on désigne par h la hauteur du centre de gravité du véhicule au-dessus des rails et M sa masse, on a en effet :

$$C_c = Mh\frac{V^2}{R}.$$

Si le véhicule comporte n roues on aura :

$$C_c + C_g = (Mh + nm'r)\frac{V^2}{R}.$$

Le couple gyrostatique ajoute son effet à celui de l'inertie centrifuge; il doit être pris en considération dans la détermination du devers, mais il n'influe pas sur le transport latéral des rails en courbe.

Ce couple, signalé pour la première fois par Wittfeld (*69*) présente un grand intérêt théorique; en fait, il est peu important et on peut calculer que pour les véhicules ordinaires il atteint à peine 4 p. c. du moment de renversement dû à la réaction centrifuge.

Par un raisonnement analogue on verrait que toute irrégularité horizontale des rails peut produire momentanément une pesée inégale sur les deux files de rails. Mais ici, à cause de la brusquerie de ces déviations accidentelles, le couple gyrostatique pourra être beaucoup plus accentué

et produire sur une voie flexible un véritable coup de roulis.

L'effet gyrostatique intervient également chaque fois qu'une irrégularité de l'un des rails incline transversalement un essieu, ce qui engendre un couple tendant à faire pivoter le véhicule autour d'une verticale.

Supposons que l'un des rails présente une bosse, dont nous appellerons p la pente moyenne d'un des versants, et soit L l'écartement de la voie; lorsque la roue montera sur la bosse, l'axe de l'essieu tournera dans le plan vertical avec une vitesse angulaire

$$\omega = \frac{pV}{L}.$$

Le couple gyrostatique produit, dans le plan horizontal, aura pour valeur :

$$C = J\Omega\omega = m'r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{pV}{L} = \frac{m'rp}{L} V^2 . \qquad (49)$$

Ce couple aura une tendance à mettre le véhicule en travers de la voie, ou plus exactement, à le faire tourner de manière à ce qu'il se dirige vers le rail régulier.

En descendant d'une bosse, un couple de même grandeur agit sur le véhicule et tend au contraire à le diriger vers le rail irrégulier.

Nous rencontrons une première application de ce résultat dans le cas de l'inégalité de hauteur que l'on crée à dessein dans les courbes de raccordement. On voit que l'effet gyrostatique joue un rôle plutôt favorable puisqu'il tendra à faciliter l'entrée en courbe et aidera le véhicule à reprendre l'alignement droit à la sortie de la courbe.

Une seconde application du même résultat lui découvre au contraire des conséquences fâcheuses. Chaque irrégularité en hauteur de la table de roulement tend, en effet, à produire un mouvement de lacet qui peut aller jusqu'à amorcer une usure locale de la face latérale du bourrelet; on peut établir par un exemple que cet effet est assez énergique.

Soit un essieu à l'écartement de 1 mètre dont les deux

roues pèsent ensemble 600 kilos et dont le $J = 11$ k/g.m², le rayon de roulement est 50 centimètres et la vitesse $V = 25$ m/sec (90 km/heure). Supposons que l'une des roues franchisse une bosse de 100 millimètres de longueur et de 2.5 millimètres de hauteur ce qui donne pour chaque versant une pente $p = 0{,}05$.

La relation (49) donne

$$C = \frac{11 \times 0{,}05 \times \overline{25}^2}{0{,}50 \times 1{,}00} = 687 \text{ kg.m} .$$

Ce couple peut sembler faible et incapable de produire le mouvement de lacet annoncé par la théorie, à cause de la résistance au glissement transversal qu'il devra surmonter; mais il n'est pas impossible qu'un phénomène analogue à celui des mouvements louvoyants intervienne et rende assez faible la résistance au glissement transversal. Dans ces conditions, malgré sa valeur modérée, le couple C dirigerait réellement le véhicule vers l'une des files de rails.

Cela étant admis, chaque irrégularité dans un rail amorcerait donc un mouvement de lacet et tendrait à provoquer par glissement transversal, une usure locale de la face supérieure de la table de roulement des rails.

On pourrait chercher à expliquer ainsi comment une irrégularité verticale du rail engendre, par suite de l'effet gyrostatique, un mouvement horizontal, et comment celui-ci à son tour provoque une usure et une altération de la surface du rail qui peut se traduire après un certain temps par une nouvelle irrégularité verticale.

Le raisonnement qui précède peut-il intervenir dans l'explication du phénomène encore obscur de la formation et de la propagation des usures ondulatoires des rails ? Sans prendre position dans le débat, il nous semble que l'explication qui précède est au moins aussi satisfaisante que plusieurs des hypothèses mises en avant jusqu'ici; et en tout état de cause, si l'action gyrostatique n'agit pas seule elle pourrait bien être un des facteurs de ce curieux phénomène.

Remarque sur le cas particulier des trains électriques : Les conséquences de l'effet gyrostatique sur le matériel fixe et roulant sont indépendantes du mode de traction, elles sont donc applicables aux voies électriques.

Ces effets seront même exagérés dans le cas des automotrices électriques qui comportent d'autres parties tournantes que les roues. Par exemple, dans une des locomotives exposées à Turin, on compte en plus de six essieux, les rotors de deux alternateurs de 12,500 chevaux chacun, toutes ces pièces tournant dans le même sens à raison de 400 tours par minute; les effets gyroscopiques ne seront certainement pas négligeables.

D'autre part, nous avons vu plus haut [formules (48) et (49)], que les couples provenant de l'effet gyrostatique augmentent comme le carré de la vitesse; ils seront donc particulièrement à craindre aux grandes allures que l'on cherche précisément à atteindre sur les voies équipées électriquement.

En résumé, l'effet gyrostatique multiplie les causes d'ébranlement de la voie dues aux irrégularités des rails des lignes électriques à grande vitesse. Il est très probable que les difficultés éprouvées lors des premiers essais sur la ligne expérimentale Zossen-Marienfeld en 1903 ne lui sont pas étrangères; on se souvient en effet que c'est l'insuffisance de tenue de la voie qui a empêché d'atteindre dès le début la vitesse de 210 kilomètres obtenue après un renforcement de celle-ci.

30. COUPLE GYROSTATIQUE PERTURBATEUR EN NAVIGATION AÉRIENNE. — Le couple perturbateur qui vient d'être étudié dans différents cas (n°s 26 à 29), doit se manifester aussi dans les appareils de navigation aérienne qui comportent des organes tournants tels que les hélices et les moteurs rotatifs. Son importance est même d'autant plus considérable ici que les masses tournantes représentent une fraction plus importante de l'ensemble, et que, d'autre part, la stabilité naturelle de ces appareils n'étant pas très grande, un couple perturbateur relativement faible peut la compromettre.

Soit le cas d'un aéroplane, une désorientation de l'axe du moteur dans un plan quelconque donnera lieu, dans un plan perpendiculaire, à un couple gyrostatique qui sera transmis à la charpente de l'appareil par l'intermédiaire des paliers du moteur. L'axe étant dirigé dans le sens de la progression, ce couple fera apparaître une tendance au tangage (à cabrer ou à piquer vers le sol) pendant les évolutions, et tendra à provoquer des embardées latérales pendant les manœuvres verticales.

En particulier, un virage trop brusque peut provoquer un coup de tangage tel que l'angle d'attaque de l'appareil devienne négatif et qu'il pique vers le sol avant qu'une manœuvre opportune ait eu le temps de le redresser. Beaucoup d'atterrissages brusques et plusieurs accidents ne doivent pas être attribués à d'autres causes.

L'application numérique suivante permet de se faire une idée de la grandeur que ce couple doit avoir dans les aéroplanes actuels.

Les vitesses à considérer varient entre 20 et 30 mètres par seconde, les diamètres des cercles de virage vont de 200 à 50 mètres, c'est-à-dire que les vitesses angulaires des aéroplanes pendant les virages sont comprises entre $\frac{20}{100} = 0.2$ et $\frac{30}{25} = 1.2$ radian par seconde; en d'autres termes nous considérons des aéroplanes qui tournent de 180° en des temps variant de 15,7 à 2,52 secondes.

Supposons que nous ayons un moteur rotatif « Gnome » pesant 50 kilos (son moment d'inertie sera environ à $J = 0{,}344$ k/g. m²) et une hélice de 2,20 m. de diamètre et pesant 6 kilos, dont le moment d'inertie sera $J' = 0{,}442$ k/g. m²; le nombre de tours étant de 1200 par minute, ou $\Omega = 125{,}6$ rad/sec.

Le moteur donnera lieu à un couple gyrostatique constant donné par le produit $J\Omega\omega$, il en sera de même de l'hélice si elle est à plus de deux ailes; si elle est à deux ailes, ce qui est le cas général des hélices aériennes, elle tombe dans le cas des pseudo-gyrostats (n° 23) et donne lieu à un couple de direction et d'intensité variables. La composante principale de ce couple s'ajoutera au couple dû au

moteur et sa valeur oscillera deux fois par tour de l'hélice sensiblement entre 0 et $2J'\Omega\omega$.

Vitesse angulaire de virage .	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
Durée d'un demi-tour . . .	15,7″	7,85″	5,23″	3,92″	3,14″	2,62″
Couple dû à l'hélice, variable de 0 à	22,20	44,40	66,60	88,80	111,00	133,2
Couple du moteur.	8,64	17.28	25,92	34,56	43,2	51,8
Somme	30,84	61,68	92,52	123,36	154,20	185,0

Le tableau précédent indique en kilogrammètres la valeur du couple dû au moteur et la valeur maximum du couple dû à l'hélice, le couple total varie périodiquement entre les nombres indiqués par les deux dernières lignes du tableau.

On voit que ces moments ne sont pas négligeables et l'on conçoit que pour prendre un virage, l'aviateur doit connaître à fond son appareil afin de pouvoir manœuvrer ses gouvernails de manière à neutraliser graduellement la dangereuse tendance à cabrer ou à piquer. On conçoit aussi qu'une désorientation imprévue ou involontaire donne lieu à un couple gyrostatique dangereux et même fatal.

Les appareils munis de deux hélices (Wright) tournant en sens opposés sont à l'abri des inconvénients signalés et il est établi qu'ils permettent des virages plus courts sans présenter aucune tendance parasite au tangage ; les couples gyrostatiques égaux et opposés se neutralisent et produisent sur la charpente des efforts intérieurs.

Remarquons cependant que si l'on utilise deux hélices à deux ailes, il ne suffit pas qu'elles tournent en sens opposé, il faut encore pour annuler les couples parasites, qu'elles se trouvent à chaque instant dans des positions symétriques par rapport au plan de symétrie de l'appareil : cela se déduit immédiatement des remarques sur les pseudo-gyrostats n° 23.

CHAPITRE III

LES PRINCIPAUX ETATS DE SOLLICITATION DES GYROSTATS

I. — Problème du premier genre. — Gyrostat mobile autour d'un point de son axe et soumis a une force de direction constante.

Ce problème peut toujours se ramener au cas d'un gyrostat pesant, appuyé ou suspendu par un point de son axe différent du centre de gravité, mis en rotation tout en étant maintenu dans une orientation quelconque et abandonné ensuite à l'action de la pesanteur. Cela nous permettra de simplifier le langage dans les numéros qui vont suivre, mais il est bien entendu que les expressions: direction de la pesanteur, centre de gravité, plan horizontal, peuvent être remplacées par: direction de la force, point d'application de la force sur l'axe du gyrostat et plan normal à la direction de la force.

31. Première approximation. — Soit θ l'angle que fait l'axe du gyrostat (fig. 23) avec la direction de la pesanteur, celle-ci exerce autour du point fixe O un couple représenté par un vecteur horizontal:

$$c = \mathrm{P}l \sin \theta .$$

Appliquons le théorème du moment cinétique, nous au-

rons à exprimer que l'extrémité du vecteur du moment cinétique $J\Omega$, confondu en direction avec l'axe matériel du gyrostat, se déplace avec une vitesse linéaire équipollente à $\bar{c}$. L'extrémité de $J\Omega$ décrira donc dans un plan horizontal, puisque $\bar{c}$ ne cesse d'être horizontal, une courbe qui ne peut être qu'un cercle de rayon $J\Omega \sin \theta$. La vitesse angulaire ω avec laquelle ce cercle est parcouru est donnée par:

$$Pl \sin \theta = J\Omega \sin \theta \,.\, \omega$$

$$\omega = \frac{Pl}{J\Omega}. \tag{50}$$

On arrive au même résultat en appliquant une des re

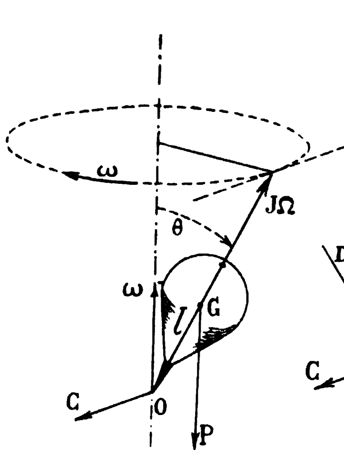


Figure 23.

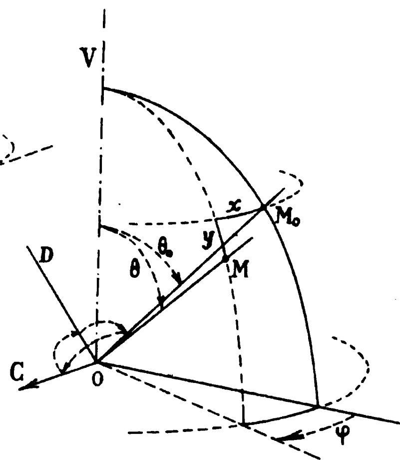


Figure 24.

marques du n° 15, supposons le gyrostat décomposé en deux autres, l'un à axe vertical caractérisé par un moment cinétique $J\Omega \cos \theta$, le second à axe horizontal et de moment cinétique $J\Omega \sin \theta$. La force P n'exerce aucun effet déviateur sur le premier, tandis qu'elle exerce sur le second un couple déviateur qui produit une précession dont la vitesse angulaire est donnée par le principe fondamental:

$$\omega = \frac{c}{J\Omega \sin \theta} = \frac{Pl}{J\Omega}. \tag{50bis}$$

On vérifie facilement que le sens du mouvement de précession est celui indiqué par la figure 23.

La formule (50) ou (50*bis*), qui sera fréquemment utilisée dans la suite, donne lieu aux énoncés suivants:

a) Un gyrostat tenu sous un certain angle avec la verticale et abandonné à la pesanteur décrit un cône circulaire autour de la verticale du point fixe;

b) La vitesse angulaire de précession est indépendante de l'inclinaison et varie en raison inverse de la vitesse de rotation propre;

c) Pour un observateur placé debout sur le plan horizontal du point fixe et regardant vers le bas — c'est-à-dire dans le sens de la pesanteur (force extérieure) — la précession a lieu dans le même sens que la rotation propre ou en sens inverse suivant que le couple exercé par la force extérieure tend à rapprocher l'axe du gyrostat de la verticale ou à l'en éloigner; la précession est dite *directe* dans le premier cas, *rétrograde* dans le second.

32. Seconde approximation. — En première approximation on n'a tenu compte que du terme gyrostatique, sans s'inquiéter des réactions d'inertie ordinaires, ce qui a fait négliger le petit mouvement de nutation déjà rencontré au n° 19.

Considérons donc un gyrostat $J\Omega$, maintenu sous un angle θ_0 avec la verticale, puis abandonné à l'action du couple c de la pesanteur. Etudions le mouvement d'un point M de l'axe du gyrostat sur la sphère dont le rayon est égal à l'unité, sa position peut être définie par les coordonnées θ et φ (fig. 24) ; θ est l'angle que fait à un instant quelconque l'axe OM avec la verticale et φ est l'angle que fait le plan méridien VOM avec un plan méridien VOM_0 choisi comme origine.

Pour la facilité des calculs, on utilisera les coordonnées:

$$x = \varphi \sin \theta \qquad y = \theta - \theta_0 ,$$

x est ainsi l'angle conique décrit par l'axe du gyrostat autour d'une droite OD normale à la fois à l'axe du gyrostat et à l'axe OC du couple.

Soit I le moment d'inertie du gyrostat (y compris éventuellement son équipage) par rapport à une perpendiculaire à l'axe de figure au point fixe. (On pourrait distinguer entre I′ par rapport à OC et I″ par rapport à OD, mais cela ne ferait que compliquer les résultats, sans intérêt.)

Appliquons les équations générales (32) du n° 15 en adoptant comme axes mobiles OCMD, on obtient directement:

$$\left.\begin{aligned} I\frac{d^2x}{dt^2} - J\Omega\frac{dy}{dt} &= o\,. \\ I\frac{d^2y}{dt^2} + J\Omega\frac{dx}{dt} - c &= o\,. \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Le couple $c = Pl \sin \theta$ est fonction de θ, mais nous savons par expérience que θ variera peu pendant le cours du mouvement, nous supposerons donc le couple constant et égal à $Pl \sin \theta_0$, cela simplifie le calcul, mais il y aura lieu de se souvenir que les résultats ne seront valables que si θ ne s'écarte que peu de θ_0.

Les équations (51) ne diffèrent pas des équations (33′) du n° 19, en tenant compte des conditions initiales $x = y = \frac{dy}{dt} = o$ pour $t = o$, on trouve, en éliminant x entre les deux équations:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{J^2\Omega^2}{I^2}y - \frac{C}{I} = o\,,$$

et l'intégrale générale:

$$y = C_1 \sin\frac{J\Omega}{I}t + C_2 \cos\frac{J\Omega}{I}t + \frac{cI}{J^2\Omega^2}$$

avec ;

$$C_1 = o \quad \text{et} \quad C_2 = -\frac{cI}{J^2\Omega^2}\,,$$

d'où :

$$y = \frac{cI}{J^2\Omega^2}\left(1 - \cos\frac{J\Omega}{I}t\right).$$
$$x = \frac{c}{J\Omega}t + \frac{cI}{J^2\Omega^2}\sin\frac{J\Omega}{I}t. \qquad (52)$$

En passant aux variables:

$$\theta = \theta_0 + y \qquad \text{et} \qquad \varphi = \frac{x}{\sin\theta_0}$$

on obtient finalement:

$$\theta = \theta_0 + \frac{IPl\sin\theta_0}{J^2\Omega^2}\left(1 + \cos\frac{J\Omega}{I}t\right).$$
$$\varphi = \frac{Pl}{J\Omega}t + \frac{IPl}{J^2\Omega^2}\sin\frac{J\Omega}{I}t. \qquad (53)$$

Le mouvement de l'axe du gyrostat se compose d'un mouvement en azimut à vitesse constante $\frac{Pl}{J\Omega}$ (trouvé en première approximation), auquel se superpose un mouvement périodique, et un mouvement en hauteur également périodique.

On peut d'ailleurs traduire ces équations (53) en langage ordinaire d'une manière plus complète:

a) Le gyrostat fait une série d'oscillations isochrones dans le plan vertical pendant que ce plan tourne d'un mouvement périodiquement varié autour de la verticale du point fixe;

b) La vitesse du moyen mouvement de précession autour de la verticale est $\frac{Pl}{J\Omega}$, elle est indépendante de l'inclinaison de l'axe et inversement proportionnelle à la vitesse de rotation propre. (Le sens du mouvement est indiqué au n° 31, *c*);

c) La période des oscillations de nutation est $T = \frac{2\pi I}{J\Omega}$, elle est indépendante du moment des forces extérieures;

d) L'amplitude angulaire des oscillations de nutation est $\theta_1 - \theta_0 = \frac{2IPl \sin \theta_0}{J^2\Omega^2}$; elle est inversement proportionnelle au carré du moment cinétique ;

e) Un point de l'axe du gyrostat décrit sur la sphère menée autour du point fixe une succession de festons entre les parallèles θ_0 et θ_1. Le rapport de la largeur des festons, mesurée sur le parallèle θ_0, à leur hauteur mesurée sur le méridien est $\pi : 1$;

f) La hauteur des festons décrits par le point de l'axe à l'unité de distance du point fixe, estimée suivant la direction de la pesanteur est :

$$h = (\theta_1 - \theta_0) \sin \theta_0 = \frac{2IPl \sin^2 \theta_0}{J^2\Omega^2}. \qquad (54)$$

Remarque I. — Les coordonnées auxiliaires choisies x et y sont des coordonnées tangentielles ; supposons que l'on développe sur un plan le cône tangent à la sphère de rayon 1 le long du parallèle θ_0, la trace de l'axe du gyrostat sur le cône, ou sur la sphère, se développera suivant une épicycloïde.

Autrement, si x et y, des relations (52), représentaient les coordonnées rectangulaires d'un point, ces équations seraient celles d'une cycloïde. Nous avons supposé le gyrostat abandonné à l'action de la pesanteur sans vitesse initiale de précession, s'il y avait une vitesse initiale $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$, la trace d'un point de l'axe eut été une cycloïde allongée ou raccourcie.

Dans tous les cas où il n'y a pas de vitesse initiale, on a une cycloïde ordinaire dont les points de rebroussements se trouvent sur le parallèle supérieur.

Remarque II. — Les relations auxquelles on est arrivé montrent nettement que l'amplitude de la nutation est d'autant moindre que la rotation propre est plus rapide. Le tableau suivant donne une idée de la hauteur verticale h des festons, équation (54), en fonction de la quantité $k = \frac{J^2\Omega^2}{4IPl}$

qui caractérise le gyrostat, dans les trois hypothèses : $\theta_0 = 30°$, $60°$ et $90°$.

$k = \frac{J^2\Omega^2}{4IPl}$	Valeurs de h		
	$\theta_0 = 30^0$	$\theta_0 = 60^0$	$\theta_0 = 90^0$
50	0,00250	0,0075	0,0100
20	0,00625	0,01875	0,0250
10	0,01250	0,0375	0,0500
5	0,02500	0,0750	0,1000
2	0,06250	0,1875	0,2500
1	0,1250	0,3750	0,5000
0	—	—	—

Ces résultats, comme le principe de l'effet gyrostatique lui-même, ne seraient rigoureusement exacts que si Ω était infiniment grand, et, d'autre part, nous savons qu'ils ne doivent être pris en considération que si l'angle θ ne s'écarte pas notablement de θ_0. Nous verrons au n° 33 quels ont été les facteurs négligés et au n° 34 nous aurons un moyen d'évaluer quantitativement les erreurs dont sont affectés les résultats du tableau précédent ; nous verrons alors que ces erreurs sont insignifiantes pour les valeurs de k atteignant ou dépassant 5.

33. Description qualitative rigoureuse du mouvement. — L'erreur fondamentale volontairement commise, dans le but de simplifier les calculs conduisant aux résultats précédents, consiste à supposer l'axe matériel et l'axe du moment cinétique confondus pendant toute la durée du mouvement.

En fait, ces axes se séparent dès le début, comme on peut s'en rendre compte en analysant le mouvement qui n'est autre qu'un mouvement de Poinsot généralisé (voir n° 11).

Supposons un gyrostat maintenu dans la direction OF_0 (fig. 25) ; aussitôt abandonné à la pesanteur, dont l'action

se traduit par un couple C autour du point fixe O, l'axe de figure (axe matériel) subit une accélération angulaire dans le plan vertical ZOF_0, le premier élément de la trajectoire cherchée sera donc vertical.

En même temps, sous l'effet du même couple, l'extrémité du vecteur du moment cinétique, dont la direction $O\mathfrak{M}_0$ était

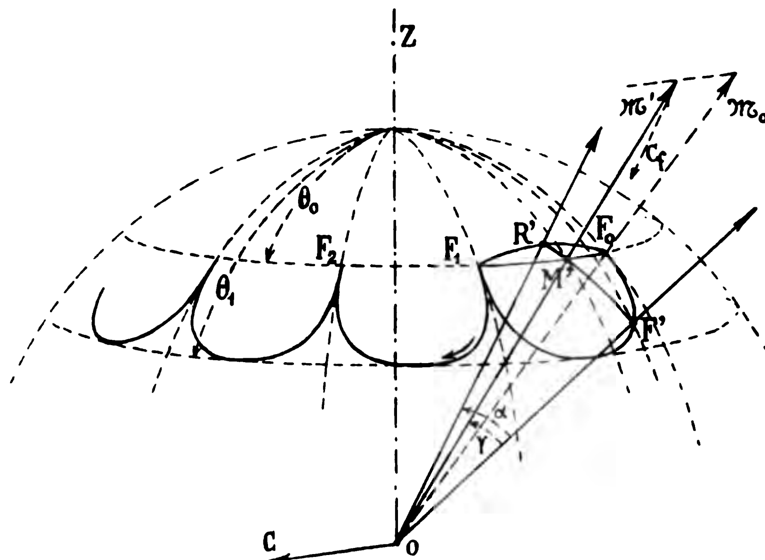


Figure 25.

au début confondue avec celle de OF_0, se déplace normalement au plan $ZO\mathfrak{M}_0$ vers $O\mathfrak{M}'$.

Remarquons ici que malgré les variations de l'inclinaison θ de l'axe matériel avec la verticale, le vecteur C sera toujours horizontal et que, par conséquent, l'extrémité du vecteur $\mathfrak{M}$ se déplacera toujours dans un même plan horizontal.

Nous savons, d'autre part, que pour un solide de révolution, les trois vecteurs OF, $O\mathfrak{M}$, OR sont dans un même plan (n° 8) et que leurs positions relatives sont données par

$$\frac{\text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,\gamma} = \frac{J}{I}. \qquad (26)$$

(Dans le cas de la figure, l'ellipsoïde de révolution est supposé aplati $J > I$.)

Enfin nous pouvons déterminer de proche en proche la vitesse instantanée de rotation autour de l'axe OR.

Pour chacune des positions successives $O\mathfrak{M}_0$, $O\mathfrak{M}'$..., on peut donc déterminer de proche en proche la position du plan des trois vecteurs, et la relation écrite plus haut permettra de trouver les positions simultanées des trois vecteurs dans leur plan.

Les plans méridiens ZOF' et ZOM' font entre eux un petit angle, de sorte que le vecteur C normal ZOF' n'est pas normal à $ZO\mathfrak{M}'$, mais il s'en faut de peu, le trajet décrit par $\mathfrak{M}$, tout en ne sortant pas d'un plan horizontal, n'est donc pas rigoureusement circulaire.

On arrive ainsi à se représenter le lieu géométrique de M, point de percée de $O\mathfrak{M}$ dans la sphère de rayon 1, comme une courbe différant très peu d'un petit cercle horizontal $F_0M'F_1F_2$... ; le lieu de R comme une courbe sinueuse $F_0R'F_1$... et le lieu de F comme une courbe $F_0F'F_1F_2$... formée d'une série de boucles qui s'appuient normalement sur le petit cercle horizontal passant par la position initiale de l'axe.

Le chemin décrit par un point de l'axe est donc compris entre deux cercles horizontaux θ_0 et θ_1, mais ce n'est pas une simple cycloïde.

On reconnaît par le raisonnement précédent que plus la vitesse propre Ω sera grande, plus la période des boucles successives sera courte.

Inversement, l'influence initiale de la pesanteur sera d'autant plus marquée et les boucles d'autant plus importantes que la rotation propre sera plus lente ; en même temps les boucles s'éloigneront de plus en plus de la forme cycloïdale. Dans le cas limite où Ω serait nul, le système devenant un simple pendule, le point F oscillerait suivant un arc de méridien.

Ce qui précède suppose le gyrostat abandonné sans vitesse à l'action de la pesanteur, dans la position OF_0 ; s'il y a une vitesse initiale, celle-ci modifie la forme de la trajectoire de F et fait notamment disparaître les points de rebroussement ; on peut obtenir ainsi une variété infinie de trajectoires complexes ayant les formes les plus inattendues.

Moyennant certaines conditions initiales très particulières, la trajectoire de F peut même se réduire à un cercle horizontal; en effet, si à l'instant où la pesanteur commence à agir, le point F est animé d'une vitesse dirigée suivant F_0M', cette vitesse agissant comme précession forcée, provoque un couple de réaction gyrostatique qui peut être précisément égal à $Pl \sin \theta_0$. Dans ces conditions, il n'y a aucun mouvement vers le bas et le mouvement se réduit à une précession rigoureusement uniforme. (Nous verrons au n° 36 en quoi cette précession uniforme diffère de la précession moyenne: $\omega = \frac{Pl}{J\Omega}$.)

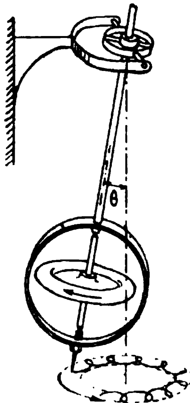


Figure 26.

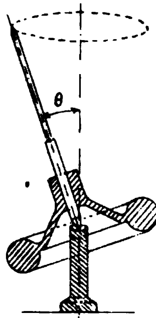


Figure 27.

On peut reproduire ces divers mouvements en se servant d'un petit pendule conique dont la masse est constituée par une toupie gyrostatique (fig. 26) ; pour des angles θ assez faibles, on peut même enregistrer ces mouvements en fixant à l'extrémité inférieure du pendule un pinceau imbibé d'encre qui dessine la trajectoire sur une feuille de papier horizontale.

On observe encore mieux ces trajectoires complexes au moyen de la toupie gyrostatique représentée par la figure 27, dont on peut placer le centre de gravité à une distance quelconque au-dessus ou en dessous du point d'appui, cela permet notamment de diminuer le produit Pl et de réduire autant que l'on veut la vitesse du moyen mouvement de précession.

34. Equations différentielles exactes. — Discussion géométrique. — Pour définir analytiquement les mouvements compliqués qui viennent d'être décrits, il faut recourir à des méthodes de calcul que nous ne reproduirons pas, ce serait sortir du cadre de cette étude dont les applications doivent constituer le principal objet.

Il est néanmoins utile d'indiquer la marche suivie et d'écrire les équations différentielles du mouvement, ne fût-ce que pour tirer de leur discussion quelques déductions générales qui préciseront les conclusions du n° 32 et leur donneront plus de poids.

Pour la mise en équation, on part généralement des équations d'Euler (16) (17) et (18), d'où l'on déduit facilement deux premières intégrales. Mais on peut écrire directement ces deux intégrales en appliquant les théorèmes du moment cinétique et de la force vive.

Désignons toujours par θ l'angle de l'axe du gyrostat avec la verticale, par $\frac{d\psi}{dt}$ sa vitesse angulaire autour de la verticale du point fixe et par I le moment d'inertie du gyrostat par rapport à un diamètre équatorial de son ellipsoïde d'inertie au point fixe.

La première intégrale exprimera que la composante verticale du moment cinétique est constante pendant le mouvement, puisque le couple extérieur dû à la pesanteur ne cesse pas d'être horizontal:

$$J\left(\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}\cos\theta\right)\cos\theta+I\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta=\mathcal{M}_0 .$$

Remarquons que la seule force extérieure appliquée rencontre l'axe du gyrostat, dès lors, la vitesse angulaire estimée autour de cet axe restera constante pendant le cours du mouvement, l'on peut donc écrire :

$$\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}\cos\theta=\Omega=\text{constante} ,$$

et l'équation précédente devient:

$$J\Omega\cos\theta=I\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta=\mathcal{M}_0 .$$

La seconde intégrale exprimera que la variation de force vive pendant un temps quelconque est égale au double du travail de la force extérieure pendant le même temps:

$$J\Omega^2+\left(I\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\right)^2+I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\mathcal{C}_0+2Pl\,(\cos\theta_0-\cos\theta) .$$

Les circonstances initiales étant définies par:

$$\mathfrak{M}_0 = J\Omega \cos\theta_0 , \qquad \mathfrak{T}_0 = J\Omega ,$$

les équations précédentes deviennent:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{J\Omega}{I\sin^2\theta}(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\ I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= 2Pl(\cos\theta_0 - \cos\theta) - I\left(\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Eliminant ψ entre ces deux équations, on trouve:

$$I^2\left(\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\right)^2 = (\cos\theta_0 - \cos\theta)[2IPl\sin^2\theta - J^2\Omega^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)],$$

ou encore: (56)

$$I\frac{d\cos\theta}{dt} = \sqrt{(\cos\theta_0 - \cos\theta)[2IPl\sin^2\theta - J^2\Omega^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)]}.$$

Cette équation exprime t en fonction de $\cos\theta$ par une fonction elliptique et ψ sera exprimé par une fonction doublement périodique du temps (*).

Nous nous bornerons à discuter l'équation (56) qui exprime $\left(\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\right)^2$ au moyen d'un polynome de troisième degré en $\cos\theta$. On reconnaîtra facilement que ce polynome s'annule pour trois valeurs de $\cos\theta$ dont l'une correspond à une angle θ imaginaire, les deux autres fournissant des va-

---

(*) Posons $\cos\theta = x$ et représentons le second membre de l'équation (56) par $\varphi(x)$, on obtient alors, en effet, les formes caractéristiques des intégrales elliptiques :

$$t = \int \frac{I\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \qquad \psi = \int \frac{J\Omega(x_0 - x)}{I(1 - x^2)} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} .$$

L'étude de ces intégrales conduit à conclure que $\cos\theta$ ainsi que $\frac{d\psi}{dt}$ reprennent les mêmes valeurs au bout d'une période T, tandis que ψ augmente de constantes. Un point de l'axe du gyrostat décrit une courbe indéfinie.

Par un choix judicieux des paramètres, les intégrales elliptiques sont réduites à des intégrales pseudo-elliptiques, le résultat est alors algébrique et la courbe décrite par un point de l'axe se ferme sur elle-même. L'étude de ces mouvements a été faite par Greenhill (*61*), les trajectoires algébriques qu'il a obtenues pour certains cas particuliers ont été représentées par M. Dewar (*63*) en projection stéréoscopique.

leurs de θ comprises entre 0° et 180°. Géométriquement, cela signifie que le mouvement en hauteur de l'axe du gyrostat présente une vitesse nulle pour deux inclinaisons limites, ces inclinaisons définissent les cercles de parallèles entre lesquels se confine le mouvement décrit au numéro précédent.

En effet, le polynome formant le second membre de l'équation (56) admet une première racine

$$\theta = \theta_0 .$$

Les deux autres s'obtiennent en égalant à zéro le contenu du crochet :

$$2\mathrm{IP}l\,(1 - \cos^2 \theta) - \mathrm{J}^2\Omega^2\,(\cos \theta_0 - \cos \theta) = 0$$

on en tire:

$$\cos \theta = k \pm \sqrt{k^2 - 2k \cos \theta_0 + 1}$$

à condition de poser:

$$k = \frac{\mathrm{J}^2\Omega^2}{4\mathrm{IP}l} .$$

La quantité k étant positive, le signe + placé devant le radical conduit à une valeur de cos θ supérieure à l'unité, ne correspondant donc à aucune valeur réelle de θ.

Le signe — au contraire, donnera une valeur de cos θ comprise entre 0 et 1, qui définira la seconde limite θ_1 par la relation:

$$\cos \theta_1 = k - \sqrt{k^2 - 2k \cos \theta_0 + 1} . \qquad (57)$$

Si donc le gyrostat n'a aucune vitesse initiale à l'instant où il est abandonné à la pesanteur, un point quelconque de son axe décrira une courbe sphérique comprise entre deux parallèles horizontaux déterminés par θ_0 et θ_1.

Nous étudierons la relation qui existe entre ces deux limites et la grandeur de la rotation propre, en nous servant d'une construction graphique.

Traçons une demi-circonférence dont le rayon représentera l'unité de longueur (fig. 28), le rayon OF_0 définit l'inclinaison initiale θ_0, sa projection OA_0 représente cos θ_0.

Portons sur la verticale du point O une longueur OK $= k$ et joignons KF_0, la longueur du côté KF_0 du triangle OKF_0 représentera $\sqrt{k^2 - 2k \cos \theta_0 + 1}$; traçons enfin l'arc de cercle

F_0A_1, il détermine une longueur $OA_1 = OK - KF_0$ égale à $\cos\theta_1$ et donne directement la direction OF_1, c'est-à-dire le second angle limite θ_1.

L'examen de la figure 28 conduit à l'énoncé des propriétés suivantes:

a) Dans tous les cas, on aura $\theta_1 > \theta_0$, la seconde position limite sera en dessous de la position initiale;

b) L'écart angulaire entre les deux limites θ_1 et θ_0 est d'autant plus faible que le point K sera plus haut, c'est-à-dire que la rotation Ω sera plus rapide;

c) L'angle initial θ_0 étant donné, on peut déterminer par une construction graphique la vitesse Ω minimum que doit avoir le gyrostat pour que la limite inférieure ne tombe pas en dessous d'une direction donnée θ_1; il suffit de joindre F_0A_1 et d'élever au milieu de cette droite une perpendiculaire qui détermine le point K et, par suite, la valeur de k qui doit être au moins atteinte;

Figure 28.

d) A mesure que la vitesse Ω diminue, le point K se rapproche de 0, l'angle limite θ_1 augmente, dépasse **90°**, s'abaisse en dessous de l'horizontale et atteindrait π pour $k = o$. Dans ce dernier cas, qui correspond à une rotation nulle, le gyrostat partant de son inclinaison initiale θ_0 oscillerait en passant par la verticale ON comme un pendule ordinaire;

e) La construction graphique permet de reconnaître que si k diffère même très peu de zéro, ce qui a lieu pour une

rotation très peu marquée, l'angle θ_1 prend néanmoins une valeur qui diffère sensiblement de π, c'est un des faits qui frappent le plus lorsqu'on fait l'expérience au moyen d'un pendule gyrostatique, la moindre rotation propre fait passer l'axe du pendule sensiblement en dehors de la verticale. Par exemple, dans la figure 26, les positions OF'_0 et OF'_1 correspondent à la valeur très faible $k = OK'$.

Au point de vue pratique, la propriété *b* ci-dessus est la plus importante, elle exprime que le phénomène parasite de la nutation est d'autant moins marqué, que les caractères distinctifs du gyrostat sont plus accentués, c'est-à-dire que $J^2\Omega^2$ est plus grand. Précisons cette conclusion par un calcul numérique en exprimant la hauteur verticale *h* des boucles décrites par le point de l'axe qui se trouve à l'unité de distance du point fixe, cette hauteur est représentée par la distance A_0A_1 (fig. 28), elle est donnée par:

$$h = \cos\theta_0 - k - \sqrt{k^2 - 2k\cos\theta_0 + 1}\,. \qquad (58)$$

Calculons *h* pour différentes valeurs de *k* et pour les inclinaisons initiales $\theta_0 = 30°$, $60°$ et $90°$, nous obtenons ainsi le tableau suivant dans lequel sont reproduites, en regard des valeurs exactes de *h*, les valeurs correspondantes trouvées par la méthode approchée [n° 32, équation (54)].

$k = \dfrac{J^2\Omega^2}{4IPl}$	Valeurs de h					
	$\theta_0 = 30°$		$\theta_0 = 60°$		$\theta_0 = 90°$	
	exacte	approch.	exacte	approch.	exacte	approch.
50	0,00253	0,00250	0,00750	0,00750	0,0100	0,0100
20	0,006351	0,00625	0,01920	0,01875	0,0250	0,0250
10	0,01312	0,01250	0,0393	0,0375	0,0499	0,0500
5	0,03012	0,02500	0,0825	0,0750	0,0990	0.1000
2	0,10539	0,06250	0,23205	0,1875	0,2361	0,2500
1	0,38365	0,12500	0,5000	0,375	0,4142	0,5000
0	1,86603	—	1,5000	—	1,000	—

Ces résultats confirment ce que nous avons dit en terminant le n° 32 et montrent que notre méthode dite de seconde approximation est parfaitement suffisante pour les cas pratiques où il s'agit de systèmes animés de la rotation rapide qu'implique la définition des « gyrostats ».

35. Cas particulier de la toupie dormante. — On dit qu'une toupie « dort » lorsque son axe de figure se maintient vertical ou sensiblement vertical pendant le cours du mouvement.

Ce cas particulier, défini par $\theta_0 = o$, n'a pas été examiné dans la discussion précédente, on trouverait d'ailleurs que θ_1 serait nul en même temps que θ_0 et que la toupie resterait verticale ; mais ni l'équation (57) ni la figure 28 ne fournissent aucune indication sur la valeur correspondante de k.

Pour lever cette indétermination, il y a lieu de chercher les conditions nécessaires pour que ce cas particulier du mouvement du gyrostat soit possible, en d'autres termes de rechercher dans quelles conditions la position verticale de la toupie est stable.

A cet effet, supposons que la toupie fasse avec la verticale un angle θ_0 très petit, nous pourrons dire que son mouvement sera stable si le second angle limite θ_1 est du même ordre de grandeur que θ_0. Reportons-nous à la figure 28, en nous souvenant par quelle construction géométrique on peut déduire θ_1 de θ_0, on voit immédiatement que ces deux angles seront certainement du même ordre de grandeur si le centre K de l'arc de cercle auxiliaire F_0A_1 se trouve à l'extérieur du cercle de rayon I et qu'il n'en sera pas de même si la longueur OK est inférieure à l'unité. D'où nous déduisons la condition de stabilité :

$$k > 1 \qquad \text{ou} \qquad \Omega^2 > \frac{4IPl}{J^2} \qquad (59)$$

Si nous étendons le cas de la « toupie dormante », au pendule gyrostatique dont l'axe est vertical, ce qui correspond à $\theta_0 = 180°$, le même raisonnement et le même résultat s'y appliquent *à fortiori*.

Nous retrouvons ainsi graphiquement la condition que M. Klein (*66*) a établie par l'analyse.

36. Etude particulière de la précession uniforme. — On appelle précession uniforme le mouvement sans nutation obtenu moyennant des conditions initiales particulières.

Soit OF l'axe de figure (fig. 29), O le point fixe, G le point d'application de la force extérieure de direction constante (disons pour simplifier, la pesanteur), l'inclinaison du gyrostat est définie par l'angle θ que fait la portion OG de l'axe avec la direction OZ opposée à la direction de la force (verticale ascendante).

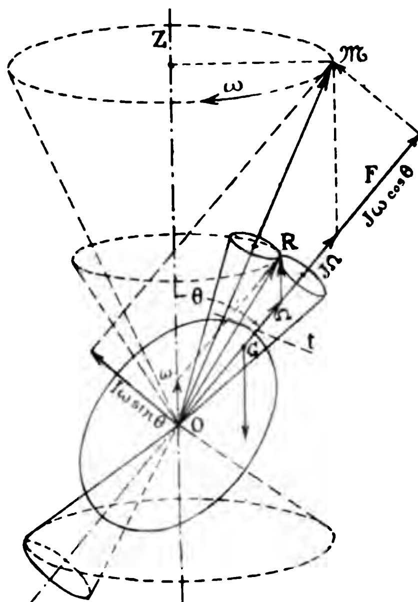


Figure 29.

Désignons par ω la vitesse angulaire de la précession uniforme, nous pourrons faire les remarques suivantes, auxquelles d'ailleurs l'examen de la figure conduit tout naturellement:

a) Connaissant Ω et ω, on peut trouver sans difficulté la direction OR de l'axe instantané de rotation, il suffit d'ajouter géométriquement les vecteurs Ω et ω. On en déduit l'ouverture des deux cônes circulaires dont le roulement définit le mouvement du système, leurs demi-angles au sommet sont FOR et ROZ.

Si l'angle GOZ$<$90° (toupie), le cône lié au corps roule sur la surface extérieure du cône fixe; si GOZ$>$90° (pendule gyrostatique), le cône mobile roule sur la face intérieure du cône fixe. Ces deux cas correspondent respectivement à la précession directe et à la précession rétrograde.

Dans l'un et l'autre cas, le cône mobile semble appuyé contre le cône fixe au mépris de la force extérieure, cette remarque peut servir à établir une règle mnémonique.

b) De même que l'on a trouvé l'axe OR, on peut déterminer facilement le vecteur $O\mathcal{M}$ du moment cinétique, il se déduit de ses deux composantes suivant OF et suivant une normale à OF, savoir:

$$J(\Omega + \omega \cos\theta) \qquad \text{et} \qquad I\omega \sin\theta .$$

La connaissance de ce vecteur $O\mathcal{M}$, situé dans le plan vertical de OZ et de OF, permet de déterminer exactement la vitesse de précession uniforme; c'est, en effet, l'extrémité de ce vecteur qui se déplace avec une vitesse linéaire équipollente au couple extérieur, ce qui s'exprime par:

$$\omega \left[J(\Omega + \omega \cos\theta) \sin\theta - I\omega \sin\theta \,.\, \cos\theta \right] = Pl \sin\theta .$$

La résolution de cette équation fournit deux solutions:

$$\omega_1 = \frac{J\Omega}{(J - I)\cos\theta} - \frac{Pl}{J\Omega} - \frac{(J - I)P^2 l^2}{J^3 \Omega^3},$$

$$\omega_2 = \frac{Pl}{J\Omega} + \frac{2(J - I)P^2 l^2 \cos\theta}{J^3 \Omega^3} .$$

Il s'agit ici de vitesses angulaires constantes dont le système doit être animé dès le début; elles définissent les conditions initiales nécessaires pour obtenir la précession rigoureusement uniforme (voir n° 33).

La première solution correspond à une vitesse angulaire très grande, du même ordre de grandeur que Ω.

La seconde solution, pour peu que Ω soit considérable, donne une vitesse ω_2 qui ne diffère que d'une quantité très petite de la vitesse de précession moyenne trouvée par les méthodes approchées:

$$\omega = \frac{Pl}{J\Omega} .$$

c) La construction de la figure 29 nous indique à chaque instant la direction du vecteur $O\mathcal{M}$, nous pouvons en déduire la position du plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie au pôle de la rotation et sa trace *t* sur le plan des trois vecteurs RF $\mathcal{M}$. Il suffit de compléter la figure par ces indications pour constater que l'on a affaire à un cas de mouvement de Poinsot

généralisé. En effet, le solide exécute un mouvement de Poinsot autour d'un axe variable qui n'est autre que le vecteur du moment cinétique $O\mathcal{M}$ entraîné dans un mouvement conique sous l'action du couple extérieur.

On reconnaît aisément le cône de polhodie dont le demi-angle est FOR et le cône d'herpolhodie de demi-angle $RO\mathcal{M}$; au lieu d'être fixe comme dans le cas ordinaire de la rotation naturelle, ce dernier cône est entraîné dans le mouvement de $O\mathcal{M}$.

d) La même figure 29 permet encore de retrouver d'une manière intéressante un résultat connu. Pour former le vecteur $\overline{OR}$, il faut ajouter géométriquement un vecteur $\overline{\Omega}$ incliné de θ sur la verticale et un vecteur $\overline{\omega}$ vertical.

Pour obtenir $\overline{O\mathcal{M}}$ on peut procéder de même en portant bout à bout un vecteur $\overline{J\Omega}$ incliné de θ sur la verticale et un vecteur vertical de longueur :

$$J\omega \cos^2 \theta + I\omega \sin^2 \theta$$

ou encore :

$$\overline{J\omega}\left(\cos^2 \theta + \frac{I}{J} \sin^2 \theta\right).$$

On voit immédiatement que l'alignement de $O\mathcal{M}$ serait confondu avec celui de OR si la parenthèse qui multiplie $J\omega$ dans la dernière expression était égale à l'unité. Cela aurait lieu pour $J = I$.

Dans le cas de la figure 29 on a $J < I$, cas d'un ellipsoïde d'inertie allongé, le vecteur $O\mathcal{M}$ est extérieur à l'angle FOR; si, au contraire, l'ellipsoïde d'inertie était aplati: $J > I$, le vecteur $O\mathcal{M}$ serait compris dans l'angle FOR. Nous retrouvons ainsi une remarque importante énoncée au n° 8.

37. Influence du frottement de l'air. — Le rôle du frottement de l'air peut se ramener à l'application d'un couple extérieur supplémentaire dirigé suivant l'axe instantané de rotation. Ce couple aura pour effet de réduire graduellement la vitesse angulaire Ω; à mesure que cette vitesse diminuera, il en sera de même du moment cinétique $J\Omega$ et l'effet gyrostatique se manifestera de moins en moins.

Considérons une boucle de nutation (fig. 16 ou 25), nous savons que pendant la première demi-oscillation (descendante) l'effet gyrostatique transforme le travail de la pesanteur en force vive horizontale et que pendant la seconde moitié de la boucle (ascendante) cette force vive est transformée en travail ascensionnel.

Si maintenant, pendant le cours du mouvement, l'effet gyrostatique va en diminuant, le second de ces phénomènes sera moins marqué que le premier et, en fin de compte, l'axe du gyrostat étant moins sollicité à monter qu'à descendre, la courbe limitant les points de rebroussements, au lieu d'être un parallèle horizontal comme en l'absence de frottement, sera une espèce de spirale sphérique descendante.

Disons tout de suite que c'est là une explication plus intuitive que rigoureuse, le résultat auquel elle conduit est d'ailleurs incomplet.

Pour être précis, considérons le mouvement du gyrostat comme un mouvement de Poinsot généralisé, en tenant compte à chaque instant du couple extérieur supplémentaire exercé par le frottement de l'air ambiant. Reportons-nous à la description du mouvement qui a fait l'objet du n° 33 (voir fig. 25), l'état de sollicitation considéré alors, doit être complété par l'intervention d'un couple extérieur dont le vecteur représentatif C_f est à chaque instant dirigé en sens inverse du vecteur OR, sa longueur étant fonction de celle de ce dernier vecteur.

En vertu du théorème du moment cinétique, l'extrémité $\mathfrak{M}$ du vecteur $O\mathfrak{M}$ (fig. 25) sera continuellement entraînée dans la direction de C_f, il doit en résulter une diminution continue de la longueur de $O\mathfrak{M}$ et en même temps une déviation de ce vecteur, puisque les directions OR et $O\mathfrak{M}$ ne sont généralement pas confondues.

Examinons séparément ces deux actions.

1° Le raccourcissement de $O\mathfrak{M}$ correspond à une réduction de $J\Omega$; il s'ensuit que la vitesse angulaire moyenne de précession $\omega = \frac{Pl}{J\Omega}$ ira en croissant. C'est un accroissement d'énergie cinétique du système qui ne peut se produire sans

une réduction équivalente de son énergie potentielle, ce qui se traduit par un abaissement du centre de gravité. Donc, la précession s'accélère en même temps que θ augmente, c'est-à-dire que l'axe OF s'abaisse.

2° La déviation du vecteur $O\mathfrak{M}$ par le couple C_f est due au non parallélisme des directions OR et $O\mathfrak{M}$. Dans le cas de la figure 25, le vecteur OR est continuellement au-dessus de $O\mathfrak{M}$ et, dès lors, on se rend compte que le couple C_f aura pour effet d'augmenter continuellement l'angle θ et, par suite, d'abaisser l'axe. Mais la figure 25 s'applique à un gyrostat dont l'ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe est aplati; s'il s'agissait, au contraire, d'un gyrostat à ellipsoïde allongé, on sait que le vecteur OR se trouverait à l'intérieur de l'angle $FO\mathfrak{M}$ et le couple C_f, dans ces conditions, tendrait à dévier $O\mathfrak{M}$ dans le sens du redressement.

En résumé, le frottement de l'air qui réduit la vitesse de rotation propre tend à abaisser l'axe du gyrostat, il produit en même temps une seconde action qui accentue ou contrarie cette tendance suivant que l'ellipsoïde d'inertie est aplati ou allongé. L'étude analytique de ces phénomènes, qui serait d'ailleurs très compliquée, paraît n'avoir jamais été tentée.

En pratique, même dans le cas d'un ellipsoïde allongé, c'est la tendance à l'abaissement qui l'emporte et la descente graduelle du centre de gravité s'observe très bien au moyen de la toupie gyroscopique et de la balance de Fessel (fig. 14 et 15). Dans ces deux appareils, le couple de frottement des tourillons s'ajoute à l'action de la résistance de l'air et rend la démonstration très nette; nous verrons plus loin (n° 41) qu'il en est autrement dans le cas de la toupie ordinaire où un phénomène différent, dû au frottement de la pointe, masque les effets de la résistance de l'air.

APPLICATIONS:

38. PENDULE GYROSTATIQUE UTILISÉ COMME REPÈRE VERTICAL. — TRACE-ROULIS DE PÂRIS ET DE FRAHM. — Dans certains systèmes en mouvement, il est intéressant de connaître à chaque instant la direction de la verticale. Or, les

pendules et les niveaux à liquide, instruments parfaits sur la terre ferme, ne pourraient fournir d'indications précises, par exemple, à bord d'un navire ou d'un aérostat, que si les mouvements du système s'effectuaient autour d'un point fixe que l'on pût prendre comme point de suspension de l'appareil.

Fixé en tout autre point, le pendule subit des accélérations horizontales qui le dévient plus ou moins. (Il suffit d'établir des pendules identiques en différents points d'un même navire pour voir que leurs indications ne concordent pas pendant le roulis.) (Il en est de même pour les niveaux où les frottements du liquide ne peuvent être vaincus instantanément.)

Si une accélération horizontale dans un sens n'a produit qu'une déviation très faible à l'instant où survient une accélération égale et de sens contraire qui compense l'effet de la première, le pendule sera resté pratiquement droit. C'est ce qui se produit dans le cas de pendules à très longue période, comme ceux des oscillographes de Froude et de Bertin, et en général, des pallographes, sismographes, etc.

Un gyrostat mobile autour d'un point de son axe peut jouer un rôle analogue. En effet, en cas de rotation rapide, l'axe du gyrostat exécute un mouvement conique autour de la verticale; si la direction de la pesanteur vient à changer, le mouvement se continuera autour de la nouvelle verticale, mais si les déplacements de la direction de la pesanteur sont assez fréquents et alternatifs, et si la précession est assez lente, le mouvement conique ne sera pas sensiblement altéré; de même les accélérations alternatives qui peuvent se produire donneront lieu à de petits mouvements de précession très peu sensibles.

Le gyrostat se comporte donc comme un pendule à longue période et nous pouvons assimiler à la période la durée d'un tour de précession.

De la formule (50) nous pouvons déduire cette durée:

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{J\Omega}{mgl} = 2\pi \frac{\rho^2\Omega}{gl}\,. \qquad (60)$$

La période d'un pendule simple étant

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

nous en déduirons la longueur du pendule simple synchrone :

$$l_s = \frac{\rho^4 \Omega^2}{g l^2}.$$

Imaginons un gyrostat caractérisé par $\rho = 2$ cm. $l = 1$ millimètre $\Omega = 500$ rad/sec.

$$l_s = \frac{\overline{2}^4 . \overline{500}^2}{981 \times \overline{0,1}^2} = 408000 \text{ cm.}$$

Ce gyrostat établi sur un navire précessionnera sans être plus dérangé de son mouvement régulier que la masse d'un pendule de 4080 mètres de long (période propre de 128 secondes) ne serait ébranlée si son point de suspension participait aux mouvements du navire, dont les plus lents ont une période de 10″.

Le trace-roulis Pâris (*29*) est basé sur ce principe, il comporte un gyrostat à précession lente ressemblant beaucoup à l'instrument représenté par la figure 27 ; l'extrémité de l'axe repose par une pointe fine dans un godet d'agate, on lance l'appareil au moyen d'une ficelle en maintenant la partie supérieure de l'axe dans une pince spéciale ; une fois le mouvement donné, on ouvre la pince à un instant où l'axe est vertical et il conserve alors cette direction malgré les mouvements du navire. L'extrémité libre de l'axe porte un pinceau qui enregistre sur une feuille de papier, ingénieusement disposée et entraînée par un mouvement d'horlogerie, les inclinaisons relatives de l'axe et du navire.

L'ingénieur allemand Frahm se sert d'un instrument dérivé du précédent ; il comporte essentiellement un petit volant horizontal, suspendu à la cardan avec le petit électromoteur qui l'entraîne, de manière à former un pendule gyrostatique dont la période de précession est voisine de deux minutes. L'axe conserve sa direction verticale, et ses mouve-

ments relatifs par rapport au support donnent la mesure des angles de roulis qui sont inscrits sur une bande de papier comme dans un enregistreur quelconque.

Dans ces deux instruments, si, pour une raison ou l'autre, l'axe n'est pas vertical au début, ou s'il cesse de l'être par une cause accidentelle, il décrira un cône de précession avec sa période propre très longue et le diagramme sinueux obtenu, au lieu de présenter une ligne moyenne rectiligne, semblera avoir été tracé par rapport à une ligne de base en forme de sinusoïde à longue inflexion; la précision des lectures n'en sera d'ailleurs pas affectée.

39. Projectiles oblongs des armes rayées. — Explication de la dérivation. — Stabilité. — Les projectiles oblongs des armes rayées doivent leur supériorité sur les an-

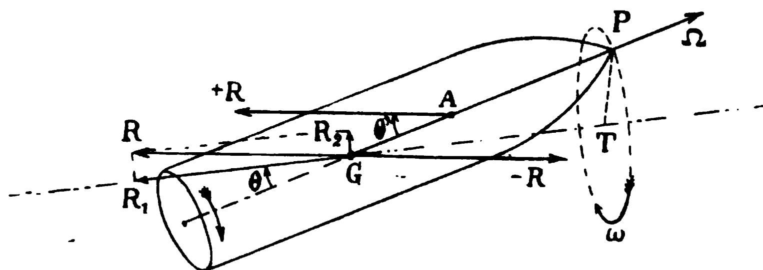


Figure 30.

ciens boulets sphériques à une plus grande stabilité sur leur trajectoire, résultant de la rotation rapide dont ils sont animés autour de leur axe de figure.

La résistance qu'éprouve de la part de l'air un projectile dont l'axe fait un angle θ avec la trajectoire GT du centre de gravité (fig. 30), est une force oblique R qui rencontre l'axe de figure en un point A différent de G, généralement en avant (*). Transportons la force R en G, nous obtien-

(*) Il est bon de noter que l'angle θ existe toujours : au moment de quitter la bouche, l'axe du projectile se confond avec l'axe de la pièce, la tangente initiale à la trajectoire. A cet instant, la résistance de l'air a la même direction et passe par le centre de gravité. Le projectile est donc dans les conditions d'un solide libre tournant autour d'un axe principal d'inertie, il tend à rester parallèle à lui-même. Cependant, la trajectoire

drons, après la décomposition indiquée par la figure 30: deux forces, R_1 retardatrice et R_2 déviatrice, qui altèrent la trajectoire du centre de gravité, et un couple R – R qui tend à faire tourner le projectile dans le plan PGT ou « plan de la résistance ».

Examinons d'abord l'effet du couple. Le projectile étant animé d'un vif mouvement de rotation, on peut le considérer comme un gyrostat supporté par son centre de gravité et soumis à un couple déviateur agissant dans un plan passant toujours par la tangente à la trajectoire. L'axe du projectile sera donc animé d'un mouvement de précession autour de GT et c'est dans la conservation de l'angle θ, angle au sommet du cône de précession, que réside la stabilité du projectile sur la trajectoire (**).

Suivant que le point A sera en avant ou en arrière de G, la précession sera directe ou rétrograde. Dans le cas général, elle est directe et la pointe du projectile tourne autour de la tangente dans le même sens que le projectile lui-même autour de son axe.

D'après les notations de la figure, le couple déviateur aura pour valeur:

$$c = R\, l \sin \theta'$$

l désignant la distance GA ; la vitesse angulaire de précession déduite de la formule (50*bis*) sera:

$$\omega = \frac{c}{J\Omega \sin \theta} = \frac{Rl \sin \theta'}{J\Omega \sin \theta}. \qquad (61)$$

De cette relation on peut déduire notamment que si la vi-

---

du centre de gravité s'infléchit vers le sol, la résistance de l'air devient oblique et les conditions de la figure 30 apparaissent. L'effet gyrostatique entrant immédiatement en jeu, on voit que l'angle θ et par suite l'ouverture du cône de précession sera toujours très faible.

(**) Si le projectile ne tournait pas sur lui-même, le couple déviateur produirait dans le plan de la résistance une accélération angulaire qui, agissant toujours dans le même sens, aurait vite fait d'amener l'axe du projectile en travers de la trajectoire, sinon de le retourner complètement ; c'est pour cette raison qu'avec les armes à canon lisse, la forme sphérique était la seule possible pour les projectiles. C'est pour cela également que les notions de projectile oblong et d'armes rayées sont inséparables.

tesse de rotation propre Ω était infinie, ω serait nul et l'axe du projectile resterait fixe en direction ; de même si la forme du projectile était telle que R passât toujours par G, l serait nul et l'axe resterait également parallèle à lui-même. Dans l'un et l'autre cas, l'obus, restant parallèle à l'axe de la pièce, prendrait des inclinaisons de plus en plus fortes par rapport à la trajectoire, et en particulier dans le cas du tir courbe la force retardatrice deviendrait considérable, elle pourrait être plus grande qu'avec un boulet sphérique et l'arme rayée perdrait ses avantages.

Ces remarques nous montrent que la vitesse de précession doit être convenablement choisie et qu'il y a lieu de l'étudier de plus près.

Tout d'abord, il faut noter que R est fonction de la vitesse V du projectile ; le mouvement de précession n'est donc pas indépendant du mouvement principal du centre de gravité, et cette circonstance en complique singulièrement l'étude.

Posons $R = \varphi(V)$, l'expression de ω devient alors:

$$\omega = \frac{\varphi(V)}{J\Omega} \frac{l \sin \theta'}{\sin \theta}.$$

Les angles θ et θ' sont très faibles, ils varient peu et le rapport de leurs sinus peut être considéré comme constant, de même la distance l peut être considérée comme invariable ; dès lors, la relation qui vient d'être écrite exprime que la vitesse angulaire de précession ω dépend uniquement de V, c'est-à-dire de la position occupée par le projectile sur sa trajectoire, et qu'elle est indépendante de l'ouverture du cône de précession, tout comme dans le cas de la toupie.

La stabilité du projectile sur sa trajectoire dépend de l'angle θ. En effet, la force déviatrice R_2 qui tend à déformer la trajectoire du centre de gravité et notamment à la faire sortir du plan de tir, est toujours contenue dans le plan tournant TGP et dirigée du côté de la pointe du projectile (*).

(*) Cela suppose $\theta' > \theta$, ce qui est le cas général ; si le contraire se présentait, la force R_2 aurait une direction opposée ; ce qui ne modifierait en rien les raisonnements qui vont suivre, seulement la « dérivation » dont il sera question plus loin se produirait à gauche du plan de tir au lieu de se produire à droite et réciproquement.

Si la trajectoire était rectiligne et si en même temps la vitesse V, et avec elle ω, était constante, la pointe du projectile décrirait une hélice régulière autour de la trajectoire du centre de gravité et les effets de la force déviatrice R_2 se compenseraient rigoureusement pendant la durée de chaque tour complet de précession, la stabilité du projectile serait parfaite.

En réalité, cette compensation ne se fait pas, car la distance entre la pointe P de l'ogive et la tangente GT est va-

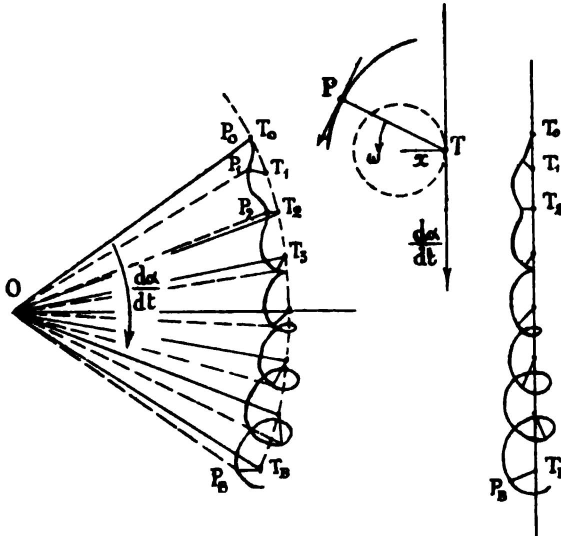


Figure 31. Figure 32. Figure 33.

riable. Pour s'en rendre compte, il faut combiner le mouvement élémentaire de précession avec le mouvement d'abaissement de la tangente à la trajectoire.

On simplifie la démonstration de ce fait en recourant à la représentation suivante due à De Sparre (57). A partir d'un pôle O (fig. 31), menons une série de droites OT_0, OT_1, etc., parallèles aux tangentes successives à la trajectoire, l'ensemble de ces droites forme un plan vertical qui coupera la sphère de rayon 1 suivant une portion de grand cercle T_0T_1... T_B. Si nous supposons, d'autre part, que l'on mène des

droites OP_0, OP_1... parallèles à l'axe du projectile, aux mêmes instants les points de percée $P_0P_1P_2...P_B$ définiront une courbe dont les vecteurs T_0P_0, T_1P_1... T_BP_B donneront à chaque instant la position de la pointe du projectile et permettront d'évaluer la force déviatrice R_2 en grandeur et en direction.

On peut supposer les tracés sur la sphère ramenés sur un plan par une projection appropriée, le tracé plan de la figure 33 se substitue alors à celui de la figure 31.

Pour partir d'un cas simple, supposons que la vitesse d'abaissement de la tangente $\frac{d\alpha}{dt}$ soit uniforme et faisons abstraction des variations de V, c'est-à-dire supposons constante la vitesse ω de précession.

D'après le principe fondamental de l'effet gyrostatique, la pointe du projectile se déplace à chaque instant perpendiculairement au plan du couple déviateur, c'est-à-dire que la courbe P sera en chaque point normale à la droite TP (fig. 32). Or, la vitesse angulaire instantanée de TP est la vitesse de précession, elle est constante; le déplacement simultané de T se fait avec une vitesse uniforme; on peut conclure que la ligne décrite par P sera du genre cycloïdal. Le rayon x, inconnu, du cercle roulant sera donné par la relation:

$$\omega x = \frac{d\alpha}{dt}.$$

Suivant la grandeur de x, c'est-à-dire suivant les valeurs relatives de ω et de $\frac{d\alpha}{dt}$, la cycloïde sera ordinaire, allongée ou raccourcie.

En pratique, les conditions sont moins simples, ω varie en fonction de la vitesse, de même, la vitesse $\frac{d\alpha}{dt}$ est variable et présente notamment un maximum au sommet de la trajectoire. La ligne P_0P_1... sera donc une ligne cycloïdale qui pourra comprendre des portions de trochoïde (cycloïde allongée) et des portions de cycloïde à boucles très marquées.

En général, si le projectile est lancé normalement, l'angle θ_0, nul au début, commence par être très petit et dans le plan de tir. A mesure que la trajectoire est parcourue, V diminue jusqu'au voisinage du sommet, et il en est de même de ω, tandis qu'en même temps la vitesse d'abaissement de la tangente s'accélère, la courbe P sera du genre trochoïde. Sur la branche descendante, V augmente tandis que $\frac{d\alpha}{dt}$ diminue, la cycloïde se raccourcira et pourra former des boucles, la figure 33 représente approximativement ces conditions moyennes.

Si la courbe P est une cycloïde ordinaire ou allongée, elle sera située tout entière d'un même côté de la droite de roulement, ce qui signifie que la pointe du projectile sera tout le temps du même côté du plan de tir et, par conséquent, la force déviatrice R_2 agira continuellement pour écarter le projectile du même côté du plan de tir ; c'est l'origine du phénomène de la dérivation. Par exemple, si un projectile tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, pour l'artilleur qui le voit s'éloigner de la pièce, il sortira du plan de tir vers la droite.

Si la courbe P est du genre de la cycloïde à boucles, la force R_2 n'agira pas toujours du même côté du plan de tir et l'action déviatrice sera partiellement compensée. (Dans le cas idéal d'une trajectoire infiniment tendue, la courbe P se réduirait à un cercle parcouru plusieurs fois autour d'un point T unique, les déviations seraient parfaitement compensées.)

Ainsi le phénomène resté longtemps mystérieux de la dérivation des projectiles rayés apparaît comme une conséquence de l'effet gyrostatique ; cette explication, malgré son caractère d'évidence, n'est cependant pas acceptée par tous les mécaniciens.

Nous ne pousserons pas plus loin l'étude de ce phénomène, car il est impossible d'en faire une analyse quantitative sans avoir une connaissance complète des lois de la résistance de l'air sur un corps de forme quelconque ; de plus, un défaut de ceinturage ou toute autre défectuosité peut produire, au

sortir de la bouche à feu, un angle initial accidentel du projectile rendant incertain tout tracé de la courbe P (*).

C'est pour ces raisons que nous n'avons pas reproduit les analyses ingénieuses de De Sparre (*57*) et de Charbonnier (*78*), qui ont traité le problème jusqu'au bout sans cependant pouvoir traduire leurs résultats en nombres certains.

De notre étude en quelque sorte qualitative, nous croyons cependant pouvoir tirer un résultat pratique: pour assurer la stabilité à un projectile sur sa trajectoire, il faut arriver à compenser l'action déviatrice; à cette fin, il faut faire en sorte que la courbe caractéristique P se rapproche de la cycloïde à boucles. Cela se traduit géométriquement en disant qu'il faut rendre aussi petit que possible le rayon du cercle roulant de la courbe P. On pourra prendre l'inverse de cette grandeur comme une mesure de la stabilité du projectile, et c'est le rapport:

$$\frac{1}{x} = \frac{\omega}{\frac{d\alpha}{dt}}$$

que l'on cherchera à rendre le plus grand possible.

La valeur de ω a été trouvée plus haut; quant à $\frac{d\alpha}{dt}$, vitesse angulaire de descente du projectile, les cours de mécanique rationnelle donnent dans l'étude du problème principal de la balistique extérieure $\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{g \cos \alpha}{V}$, de là :

$$\frac{1}{x} = \frac{\omega}{\frac{d\alpha}{dt}} = -\frac{\varphi(V) l V \sin \theta'}{g \cos \alpha J \Omega \sin \theta}.$$

Telle est l'expression qu'il faut rendre aussi grande que possible. En se souvenant que le rapport $\frac{\sin \theta'}{\sin \theta}$ peut être

(*) Ce sont les mêmes erreurs accidentelles qui ont empêché jusqu'à présent les artilleurs de trouver une relation empirique quelque peu exacte entre la dérivation et les conditions initiales du coup (vitesse initiale, rotation propre, etc.).

considéré comme constant, et en remplaçant cos α par 1, sa plus grande valeur, il reste comme quantité variable constituant ce que nous pouvons appeler le coefficient de stabilité:

$$S = \frac{V \cdot \varphi(V) l}{J\Omega}. \tag{62}$$

De là on peut déduire les conclusions suivantes:

a) Pour le tir très tendu, tir de plein fouet, la vitesse est grande pendant tout le trajet, le numérateur est considérable et la stabilité sera facilement obtenue;

b) Pour le tir courbe et le tir des obusiers, V passe par des valeurs assez faibles, et il faut autant que possible augmenter l en plaçant le centre de gravité le plus près possible du culot, diminuer Ω en adoptant des rayures à pas allongé, éventuellement réduire J;

c) A égalité de vitesse initiale et à égalité d'inclinaison des rayures, ce qui entraîne l'égalité de Ω, de deux projectiles géométriquement semblables, celui du plus petit calibre sera le plus stable (car son moment d'inertie J sera notablement plus faible). Cela explique pourquoi le tir de l'infanterie souffre moins de la dérivation que le tir de l'artillerie.

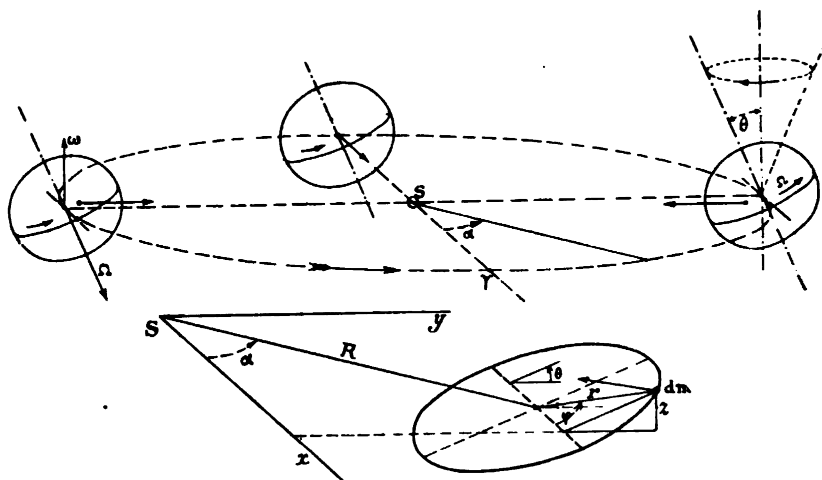
40. PRÉCESSION DES ÉQUINOXES. — L'étude de ce phénomène sort peut-être un peu du cadre de ce travail, mais comme il constitue sans doute la plus grandiose application du problème gyrostatique qui vient d'être traité, nous en dirons quelques mots, ne fût-ce que pour montrer qu'il n'est pas complètement inaccessible aux méthodes élémentaires.

La Terre, animée de son mouvement diurne, peut être considérée comme un gyrostat dont le centre de gravité (il serait plus exact de dire le centre de masse) est astreint à suivre la trajectoire elliptique annuelle. La Terre n'est pas sphérique et ressemble à un ellipsoïde de révolution aplati dont l'axe n'est pas normal au plan de l'écliptique; il s'ensuit que la résultante de l'attraction solaire sur les masses élémentaires de notre planète ne passe pas par son centre de figure

et que l'on peut y substituer une force unique passant par ce point, et un couple.

La force maintient le centre de la Terre dans son orbite; quant au couple, la figure 34 indique clairement qu'il agit toujours de manière à ramener l'axe de la Terre à être perpendiculaire à l'écliptique.

Comme la Terre est un gyrostat, le couple en question que nous appellerons c, au lieu de produire ce redressement, provoque une précession de l'axe du monde autour de la



Figures 34 et 35.

direction normale à l'écliptique; cet axe décrit donc un cône dont le demi-angle au sommet est $\theta = 23°27'$; avec une vitesse angulaire:

$$\omega = \frac{c}{J\Omega \sin \theta}. \qquad (50\ bis)$$

On reconnaîtra facilement que la précession doit être rétrograde, comme dans le cas d'un pendule gyrostatique, et ainsi s'expliquent la rétrogradation du point vernal et les modifications continuelles des coordonnées célestes.

Pour évaluer le couple c, on peut considérer la Terre comme une sphère entourée d'un bourrelet équatorial ayant une masse m et un rayon de gyration r. L'attraction du Soleil sur la sphère est symétrique, tandis que sur l'anneau elle

donne lieu à une force qui ne passe pas par le centre; on peut donc considérer ce dernier comme soumis à un couple. Le couple c que nous cherchons n'est que la composante du précédent, qui tend à faire osciller l'anneau autour de la ligne des nœuds (intersection de l'équateur terrestre et du plan de l'écliptique).

Ce couple c varie en intensité pendant le cours d'une année; il passe par les maxima aux solstices et s'annule aux équinoxes. Pour simplifier le résultat, c'est donc la valeur moyenne de ce couple qu'il convient de chercher.

En désignant par M la masse du Soleil, par R la distance qui sépare cet astre de la Terre et par f la constante de la gravitation, on trouve pour la valeur moyenne cherchée:

$$c_m = \frac{3}{4} f \frac{Mmr^2}{R^3} \sin\theta \cos\theta \ (*) .$$

Dans cette expression interviennent les quantités m et r

(*) Pour établir cette formule, adoptons un système de trois axes rectangulaires ayant le centre du Soleil pour origine et suffisamment défini par ailleurs par la figure 35.

Il s'agit d'évaluer le couple exercé par une masse M placée en S, sur un anneau de rayon r et de masse m.

En se référant aux notations de cette figure, les coordonnées d'un point de l'anneau seront:

$$x = R\cos\alpha + r\cos\varphi ,$$
$$y = R\sin\alpha + r\sin\varphi\cos\theta ,$$
$$z = \qquad r\sin\varphi\sin\theta$$

et la distance de ce point au centre du Soleil sera:

$$\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Désignons par M la masse du Soleil, par dm la masse d'un élément de l'anneau, le potentiel d'attraction du Soleil sur l'élément d'anneau sera

$$dV = f\frac{M \cdot dm}{\rho} .$$

Remplaçons ρ par sa valeur et dm par $\frac{m \cdot d\varphi}{2\pi}$, il vient

$$dV = f\frac{Mm}{2\pi R}\left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{R}\right)\left(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi\cos\theta\right)\right]^{-\frac{1}{2}} d\varphi .$$

Développons l'expression renfermée dans le crochet, par la formule du binome en négligeant les termes ou le rapport $\frac{r}{R}$ entre à une puissance supérieure à la seconde. On trouve sans peine une expression que nous ne transcrirons pas, l'écriture en étant assez longue.

qu'il faut exprimer en fonction de dimensions connues de la Terre. Désignons par i le moment d'inertie par rapport à un de ses diamètres de la sphère à laquelle il faut adjoindre le renflement annulaire ; si, d'autre part, J et I sont les moments d'inertie de la Terre respectivement par rapport à la ligne des pôles et à un diamètre équatorial, nous pouvons écrire :

$$J = i + mr^2 ,$$

$$I = i + \frac{1}{2} mr^2 ;$$

d'où :

$$J - I = \frac{1}{2} mr^2 ,$$

On obtient le potentiel relatif à l'ensemble de l'anneau en intégrant cette expression par rapport à φ entre 0 et 2π, on trouve ainsi :

$$V = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dV = f\frac{Mm}{2\pi R}\left[2\pi - \pi\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{3}{2}\pi\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\theta\right)\right].$$

Ce potentiel dépend de α et de θ.

Considérons une position particulière de l'anneau, c'est-à-dire supposons α constant ; pour cette position de l'anneau, le potentiel est uniquement fonction de θ, imaginons une variation arbitraire de l'angle θ, c'est-à-dire une rotation virtuelle $d\theta$. Le travail virtuel accompli par les forces d'attraction pendant cette rotation sera :

$$d\mathfrak{F} = \frac{dV}{d\theta} d\theta = \frac{3}{2} f \frac{Mm}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sin^2\alpha \cos\theta \sin\theta \, d\theta .$$

Ce travail peut être exprimé en fonction du couple que nous cherchons ; en effet, on peut écrire

$$d\mathfrak{F} = c \,.\, d\theta ,$$

d'où

$$c = \frac{3}{2} f \frac{Mm}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sin^2\alpha \cos\theta \sin\theta .$$

C'est la grandeur du couple qui tend à redresser l'axe de la Terre, en cherchant à le rendre normal à l'écliptique ; on voit qu'il est nul aux équinoxes $\alpha = 0$ ou $180°$ et maximum aux solstices $\alpha = 90°$ ou $270°$; on obtient sa valeur moyenne en y remplaçant la fonction $\sin^2\alpha$ par la valeur moyenne de cette fonction, qui est $\frac{1}{2}$, on trouve bien ainsi :

$$c_m = \frac{3}{4} f \frac{Mmr^2}{R^3} \sin\theta \cos\theta .$$

ce qui permet de mettre l'expression du couple c_m sous la forme:

$$c_m = \frac{3}{2} f (J - I) \frac{M}{R^3} \sin \theta \cos \theta \ .$$

Jusqu'ici nous n'avons parlé que du Soleil; or, la Lune tourne autour de la Terre, sensiblement dans le plan de l'écliptique, et produit une action analogue, également nulle et maximum deux fois par tour. Eu égard à sa proximité et malgré la petitesse relative de sa masse, la Lune exerce une action plus grande que le Soleil sur le phénomène de la précession.

Affectons les indices 1 et 2 respectivement aux éléments correspondants du Soleil et de la Lune, nous obtiendrons le couple moyen total provoquant la précession:

$$c_m = c_1 + c_2 = \frac{3}{2}(J - I) f \left(\frac{M_1}{R_1^3} + \frac{M_2}{R_2^3}\right) \sin \theta \cos \theta \ .$$

Et la vitesse angulaire du mouvement de précession sera:

$$\omega = \frac{c_m}{J\Omega \sin \theta} = \frac{3}{2} \frac{(J - I)}{J\Omega} f \left(\frac{M_1}{R_1^3} + \frac{M_2}{R_2^3}\right) \cos \theta \ . \quad (63)$$

Pour passer aux valeurs numériques, nous écrirons la formule comme suit:

$$\omega = \frac{3}{2} \frac{J - I}{J\Omega} f \frac{M_1}{R_1^3}\left(1 + \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3}\right) \cos \theta \ .$$

L'introduction du terme $f \frac{M_1}{R_1^3}$ évite de devoir connaître M_1 en valeur absolue; on peut écrire, en effet,

$$f \frac{M_1}{R^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 ,$$

T étant la durée d'une année sidérale (*).

(*) En effet, supposons l'orbite terrestre circulaire, m' la masse de la Terre, ω' sa vitesse angulaire de circulation sur l'orbite, nous pouvons écrire que l'attraction du Soleil fait équilibre à la réaction d'inertie centrifuge :

$$f \frac{M_1 m'}{R_1^2} = m' \omega'^2 R$$

D'où l'on tire :

$$f \frac{M^1}{R_1^3} = \omega'^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Adoptons les valeurs :

$$\frac{J - I}{J} = \frac{1}{305} \text{ (Tisserand)}, \quad \frac{M_2}{M_1} \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{\overline{400}^3}{30800000} = 2.08 \,,$$

$$\cos \theta = \cos 23^\circ 27' = 0.917 \,, \quad \Omega = 366 \times 2\pi \,, \quad T = 1 \,,$$

$$\omega = \frac{3 \times 2\pi(1 + 2.08) \times 0,917}{2 \times 305 \times 366 \times 1} = 0,0002387$$

Cette vitesse exprimée en radians par année sidérale correspond à 49,3″ par année sidérale, soit un tour complet de précession en 26300 ans.

II. — Problème du second genre. — Gyrostat en contact avec une surface fixe. — Toupies diverses.

41. Toupie dont la pointe peut glisser et pivoter sans frottement sur un plan horizontal parfaitement poli. — La toupie (fig. 36) se trouve par rapport à son point de contact dans les mêmes conditions que le gyrostat considéré plus haut (n° 31, fig. 23), par rapport au point fixe.

La différence entre les deux cas provient de ce que le mouvement conique de précession aura pour sommet le centre de gravité de la toupie, au lieu du point d'appui.

En effet, la réaction du plan sur la pointe sera verticale, puisque, par hypothèse, il n'y a pas de frottement ; aucune force horizontale n'agissant sur le système, son centre de gravité n'aura aucune accélération horizontale et la réaction au point de contact sera égale au poids de la toupie (cela suppose que le centre de gravité n'a pas non plus d'accélération verticale, ce qui n'est vrai qu'en première approximation).

L'unique force extérieure appliquée en dehors du centre de gravité, est la réaction mg, qui exerce par rapport à ce point un couple représenté par un vecteur horizontal $c = mgl \sin \theta$. On démontre, exactement comme au n° 31, que

l'axe conserve une inclinaison constante et décrit un cône avec une vitesse angulaire

$$\omega = \frac{mgl}{J\Omega}. \tag{50}$$

Le sommet de ce cône se trouve au point fixe, qui n'est autre que le centre de gravité G. La pointe décrit sur le plan

Figure 36.

Figure 37.

d'appui, un cercle ayant pour centre la projection de G sur ce plan.

Si le centre de gravité était animé d'un mouvement horizontal, celui-ci ne pourrait être que rectiligne et uniforme, la pointe décrirait alors sur le plan un trajet cycloïdal.

Ce qui précède suppose une rotation très rapide et une nutation négligeable, ou bien, un lancé effectué dans des conditions particulières, de manière à n'avoir qu'une précession sans nutation.

En d'autres termes, la solution qui précède n'est qu'une première approximation qui correspond à celle du n° 31, tandis qu'une étude plus précise conduirait à des résultats moins simples, analogues à ceux du n° 34.

Pour l'étude complète, on suppose la toupie, animée de la vitesse Ω, abandonnée à son inertie sous une inclinaison initiale θ_0 ; la mise en équation se fait de la même manière qu'au

n° 34 (*), et le calcul amène à conclure que l'inclinaison de l'axe ne reste pas constante, mais oscille entre deux limites θ_0 et θ_1.

Le centre de gravité est animé d'un mouvement vertical périodique d'amplitude l $(\cos \theta_0 - \cos \theta_1)$, tandis que la trace de la pointe sur le plan d'appui est une ligne sinueuse comprise entre deux cercles concentriques ayant pour centre la projection du centre de gravité.

On peut faire au sujet des angles θ_0 et θ_1 une discussion analogue à celle du n° 34, on retrouve notamment que θ_0 étant donné, la vitesse Ω doit être supérieure à une certaine limite pour que l'angle θ_1 ne soit pas trop grand et que le mouvement soit possible sans que la surface latérale de la toupie vienne en contact avec le plan d'appui.

42. Influence des frottements. — Frottement de l'air et frottement au point de contact. — Le frottement de l'air produit, sur le mouvement d'une toupie évoluant sur un plan, exactement le même effet que sur la toupie ayant un point fixe. La résistance de l'air qui réduit peu à peu la vitesse angulaire Ω, produit une inclinaison de plus en plus grande de l'axe par rapport à la verticale et l'abaissement graduel du centre de gravité (v. n° 37).

(*) Les équations diffèrent des équations (55) du n° 34 par les deux points suivants :

1° Le moment d'inertie I est remplacé par le moment d'inertie I' par rapport à un diamètre équatorial de l'ellipsoïde d'inertie en G;

2° Un terme supplémentaire doit être introduit pour tenir compte du mouvement vertical de G.

Ces équations deviennent dès lors

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{J\Omega}{I' \sin^2 \theta}(\cos \theta_0 - \cos \theta),$$

$$I'\left(\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\right)^2 + I'\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2mgl(\cos\theta_0 - \cos\theta_1).$$

Doù l'on tire, après avoir éliminé ψ et remplacé z par $l\cos\theta$

$$\left(\frac{d\cos\theta}{dt}\right)^2 = \frac{(\cos\theta_0 - \cos\theta)\left\{2mglI'\sin\theta - J^2\Omega^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right\}}{I'^2 + ml\,I'\sin^2\theta}.$$

La discussion de cette équation est analogue à celle de l'équation (56).

Cet effet peut s'observer lorsque la vitesse Ω est déjà très affaiblie, mais aussi longtemps que Ω conserve une valeur convenable, il est masqué par un autre phénomène, dû au frottement au point de contact et que nous allons étudier avec quelques détails.

La pointe d'une toupie, si fine soit-elle, est en réalité une surface de révolution de dimensions finies ; il n'y a donc pas un point de contact unique, mais une série de points de contact successifs appartenant à un parallèle de cette surface. En d'autres termes, la toupie repose sur le plan par l'intermédiaire d'une petite roue qui roule sur ce plan et qui glisse en même temps.

Au point de contact C (fig. 37) se développe une force de frottement $F = mgf$, dirigée tangentiellement au petit cercle de contact. Cette force complique le mode de sollicitation de la toupie et modifie le simple mouvement conique décrit plus haut. Néanmoins le couple $c = mgl \sin \theta$ ne cessant d'agir, le mouvement de la toupie comportera toujours une précession de vitesse angulaire ω autour de la verticale passant par son centre de gravité.

La force horizontale F peut être considérée comme appliquée au centre de gravité G à condition d'introduire un couple F-F ayant pour bras de levier la longueur $CG = l$; ce couple sera :

$$C_f = Fl = mgfl.$$

Examinons séparément les effets de la force F appliquée en G, et ceux du couple C_f.

a) La force F appliquée en G tend à entraîner ce point hors de la verticale fixe sur laquelle il resterait si tout se passait comme dans le cas théorique de la figure 36.

La force F étant horizontale, n'aura aucun effet sur la position en hauteur du point G, elle ne modifiera donc pas l'inclinaison de la toupie, pas plus qu'elle n'altérera la vitesse angulaire de précession. La trajectoire de G sera donc plane et horizontale, et la direction de F, à chaque instant normale à l'axe de la toupie, se déplacera dans ce plan horizontal d'un mouvement angulaire uniforme.

Le seul mouvement de G compatible avec ces conditions

est un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω dans lequel la force F est tenue en équilibre par la réaction d'inertie centrifuge. C'est-à-dire que nous aurons:

$$mgf = m\,\omega^2\,R\,.$$

Cette équation définit le rayon R du cercle décrit par G:

$$R = \frac{gf}{\omega^2} = \frac{f}{g}\frac{J^2\Omega^2}{m^2l^2}\,. \tag{64}$$

La projection G′ du centre de gravité de la toupie sur le plan horizontal décrit un cercle de rayon R auquel la projection CG′ de l'axe de la toupie ne cesse d'être tangente (fig. 37 et 38).

L'axe de la toupie ne décrit plus un cône, mais un hyperboloïde de révolution dont le cercle de gorge est engendré par le centre de gravité de la toupie.

Le rayon R est d'autant plus grand que f est plus élevé, c'est-à-dire que le sol est plus rugueux.

A mesure que la vitesse de rotation Ω diminue — par suite du frottement de l'air notamment, — R diminue, c'est-à-dire que la toupie décrit sur le sol des cercles de plus en plus petits.

b) Le couple $C_f = mgfl$ tend à accélérer la vitesse angulaire de précession, ce qui a pour résultat de redresser l'axe de la toupie.

En effet, appliquons la règle des trois doigts, on voit immédiatement que le couple C_f (sensiblement normal à l'axe de la toupie) aura pour effet de produire autour d'un axe horizontal une précession agissant dans le sens du redressement avec une vitesse angulaire:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{mgfl}{J\Omega}\,. \tag{65}$$

Cela nous permet d'exprimer la loi de redressement de la toupie à partir d'une inclinaison θ_0:

$$\theta_0 - \theta_1 = \frac{mgfl}{J\Omega}t\,.$$

Nous pouvons ainsi compléter la description du mouvement en disant que l'axe de la toupie décrit un hyperboloïde de révolution dont le cône directeur s'effile de plus en plus ; après un certain temps, l'axe atteint la position verticale et s'y maintient aussi longtemps que la vitesse Ω reste suffisante ; on se trouve alors dans le cas déjà étudié de la « toupie dormante » (*).

Remarques. — Description plus précise du mouvement. — La force $F = mgf$ n'est pas appliquée en un point de l'axe de la toupie, mais à la jante de la petite roue de

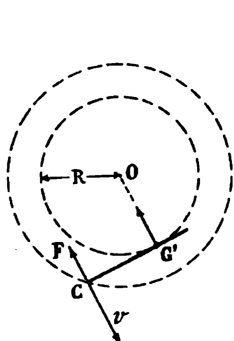


Figure 38.

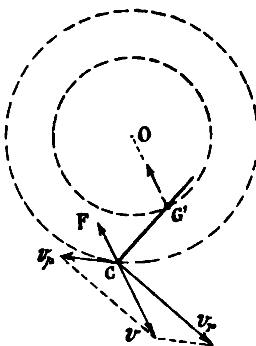
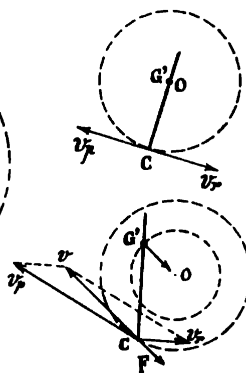


Figure 39.



Figures 40 et 41.

contact dont nous désignerons par r le rayon. Pour être précis, il faudrait donc tenir compte d'un couple composant Fr qui tend à diminuer la vitesse de rotation et dont l'effet s'ajoute à celui de la résistance de l'air.

Mais il y a une autre remarque à faire. Dans l'étude qui précède, on a supposé la force F tangente au petit cercle de contact, comme si le mouvement de la pointe par rapport au plan d'appui ne comportait que la rotation Ω. En réalité,

(*) L'expérience confirme bien tous ces faits et on remarquera à leur propos que, d'une manière générale, toute cause capable d'accélérer la précession d'une toupie tend à provoquer son redressement. C'est ainsi que les enfants accélèrent le redressement de la toupie qui évolue sur leur main en imprimant adroitement à celle-ci un mouvement circulaire horizontal dans le sens approprié.

tout en tournant autour de son axe de figure, la pointe se déplace également en glissant sur le plan d'appui par le fait du mouvement conique de précession.

La direction exacte du déplacement du point de contact par rapport au plan horizontal sera donc donnée par la résultante des deux vitesses : v_r due à la rotation, et v_p due à la précession; dès lors, la force F, au lieu d'être normale à la projection de l'axe de la toupie sur le plan d'appui, comme on l'a supposé plus haut, fera un certain angle avec cette projection. Par conséquent, la position de l'axe de la toupie, définie par sa projection sur le plan horizontal, au lieu de se trouver par rapport aux cercles décrits par C et G' comme le représente la figure 38, sera disposée en réalité comme l'indique la figure 39. Cela ne modifie pas autrement les conclusions qui précèdent, la toupie n'en décrira pas moins des cercles de plus en plus petits en même temps qu'elle se redressera jusqu'à dormir verticalement.

Considérons maintenant le cas où la toupie n'arriverait pas jusqu'à la position verticale, faute de pouvoir tourner assez longtemps par exemple. Tandis que la toupie se redresse, le rayon r du petit cercle de contact diminue, en même temps Ω diminue, et nous pouvons dire que $v_r = \Omega r$ diminue plus rapidement que Ω. D'autre part, on peut déduire de la relation (64) que la vitesse $v_p = \omega R$ diminue proportionnellement à Ω. Il résulte de là que le rapport $v_r : v_p$ ira en décroissant. Cela étant, on peut tracer une série de figures analogues à la figure 39 et on voit sans peine que plus le rapport $v_r : v_p$ diminue, plus la direction CG' se rapproche de CO; lorsque v_p sera égal à v_r ces deux vitesses seront dans le prolongement l'une de l'autre, le point de contact roulera sans glisser sur le plan horizontal, le point G' restera immobile et le mouvement de la toupie se réduira à un mouvement conique comme si elle évoluait sur un plan infiniment poli (fig. 40).

Si le rapport $v_r : v_p$ continue à décroître et devient inférieur à l'unité, les positions relatives de CG' et de R se modifient et la figure 41 donne une idée de ce qu'elles deviennent. La conséquence immédiate en est que le couple $C_f = Fl$

change de signe et, au lieu de provoquer le redressement de l'axe, il tend à le coucher sur le plan horizontal en contrariant la précession.

Les phénomènes qui viennent d'être décrits sont très intéressants à observer en faisant évoluer une toupie sur un plan bien horizontal; nous recommandons particulièrement de faire l'expérience au moyen d'une toupie à pointe en cuivre que l'on fait évoluer sur une feuille de papier à diagrammes (préparé au blanc de zinc).

L'influence du frottement de la pointe de la toupie est généralement peu connue, son importance a même complètement échappé à plusieurs auteurs qui se sont occupés de la toupie; cependant l'explication exacte, y compris l'élégante distinction entre les deux cas $v_p \gtrless v_r$ avait déjà été indiquée par Archibald Smith (*9*).

43. Mouvements des solides de révolution en contact avec un plan (ovoides, galets, cerceau, etc.). — C'est à ce même phénomène de frottement qu'il convient de rattacher l'explication des mouvements curieux que l'on observe lorsqu'un solide de révolution, animé d'une rotation rapide, entre en contact avec un plan horizontal rugueux.

Supposons le solide animé d'une vitesse de rotation Ω, autour de son axe, dont AG et A'G' (fig. 42) sont les projections, respectivement sur un plan vertical et sur le plan horizontal d'appui. ACM représente le profil méridien du solide et C le point de contact.

La réaction du plan d'appui, égale au poids P, exerce un couple $P \times C'G'$ représenté par le vecteur horizontal C_p, le frottement au point de contact produit un couple $fP \times CG$ représenté par le vecteur C_f normal à CG et dans le plan vertical de l'axe.

Considérons le solide comme un gyrostat de moment cinétique $J\Omega$; si nous faisons abstraction du frottement, nous pouvons dire que le mouvement se réduira à une précession autour de la verticale GG', telle que la vitesse de déplacement de l'extrémité du vecteur $\overline{J\Omega}$ soit équipollente à $\overline{C_p}$.

En ayant égard au frottement fP, le mouvement comportera un déplacement de G dont nous ne nous occuperons pas,

mais en même temps, l'extrémité du vecteur $J\Omega$ se déplacera avec une vitesse équipollente à $\overline{G_p} + \overline{G_f}$, qui n'est plus horizontale. Dans le cas de la figure on voit que le mouvement de l'extrémité de $J\Omega$ comporte une composante ascendante, et le solide se redressera.

D'une manière générale, on peut conclure, de l'examen de la figure 42, que si la normale CN au point de contact rencontre l'axe en dessous du centre de gravité, l'axe se redressera ; si, au contraire, cette normale coupe l'axe au-dessus du centre de gravité, il tendra à se coucher.

Dans un cas comme dans l'autre, le centre de gravité tend à être soulevé contre l'action de la pesanteur ; l'énergie nécessaire à ce travail d'élévation est empruntée à l'énergie cinétique du système.

On vérifie facilement ces propriétés par l'expérience.

Figure 42.

Supposons le solide réduit à un anneau matériel ou à un disque de rayon r (correspondant au parallèle du point de contact indiqué en pointillé sur la figure 42), nous serons dans le cas particulier du cerceau et de la pièce de monnaie faisant un certain angle avec le plan sur lequel ils roulent. Nous ne démontrerons pas que le centre de gravité du cerceau décrit un cercle horizontal et que son mouvement, rapporté à des axes de direction constante passant par son centre de gravité, se ramène à une précession uniforme ; bornons-nous à remarquer que l'on peut établir par les raisonnements précédents, que la résistance au roulement fera varier l'inclinaison dans le sens d'un abaissement du centre de gravité. On observe, en effet, qu'une pièce de monnaie s'incline de plus en plus à mesure que sa vitesse de rotation diminue.

44. Toupie dont la pointe repose dans un godet. — Nous pouvons admettre que la pointe se termine par une portion de sphère de rayon ρ et nous commencerons par supposer qu'elle repose dans une petite excavation conique (fig. 43) ; le contact aura lieu suivant une ligne circulaire de

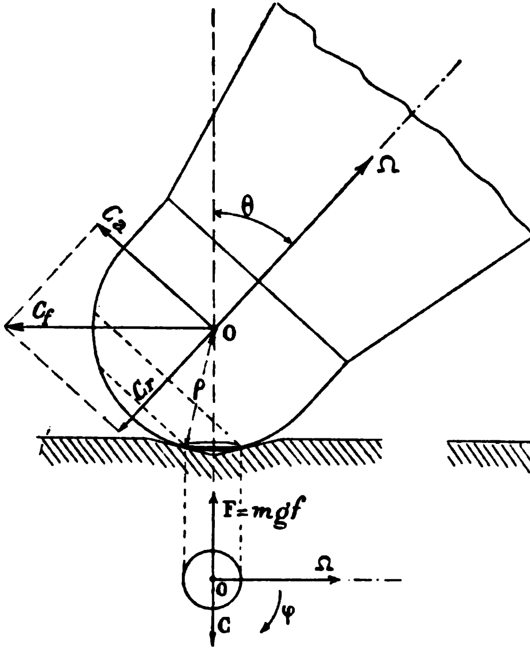


Figure 43.

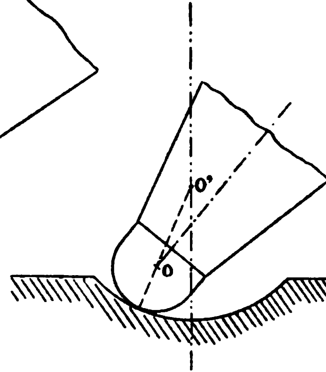


Figure 44.

très faible rayon qui tend à se réduire à un point à mesure que le cône est plus évasé.

Pendant le mouvement de la toupie, le seul point qui reste fixe est le centre O de la sphère qui, d'autre part, appartient à l'axe de la toupie. L'on peut considérer le système comme un gyrostat mobile autour d'un point O de son axe, le couple *mgl* sin θ de la pesanteur provoquera autour de la verticale de ce point le mouvement de précession uniforme que nous connaissons:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgl}{J\Omega}$$

D'autre part, à cause de sa rotation propre, le gyrostat subira de la part des points de contact une résistance F à chaque instant normale au plan vertical passant par l'axe et égale à mgf (f étant ici un coefficient de frottement global).

Cette résistance exerce sur la toupie, autour du point O, un couple (dont le bras de levier diffère peu de ρ), que l'on peut représenter par le vecteur horizontal $C_f = mgf\rho$ et décomposer en deux autres:

$$C_r = mgf\rho \sin\theta \qquad \text{et} \qquad C_a = mgf\rho \cos\theta .$$

Le premier couple, C_r, tend à réduire la vitesse de rotation propre Ω, il agit dans le même sens que la résistance de l'air.

Le second, C_a, tend à redresser l'axe avec une vitesse angulaire qui se déduit immédiatement du principe fondamental:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{mgf\rho\cos\theta}{J\Omega} \ (*) . \qquad (66)$$

C'est un effet analogue à celui que nous avons étudié à propos de la toupie évoluant sur un plan [équation (65)]; la différence à noter est qu'ici le bras de levier est beaucoup plus petit et que les dimensions de la pointe interviennent dans la vitesse de redressement.

L'intégration de l'équation précédente donne pour la loi du redressement à partir d'une inclinaison θ_0:

$$\log . \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) - \log . \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right) = -\frac{mgf\rho}{J\Omega}(t - t_0) ,$$

d'où la relation suivante qui donne la durée t d'un redressement complet de θ_0 jusqu'à $\theta = O$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right) = e^{\frac{mgf\rho}{J\Omega}t} .$$

(*) On trouve le même résultat en écrivant que le travail du couple C_a est égal au travail de redressement du centre de gravité; en effet, on obtient ainsi:

$$C_a . \omega \sin\theta\, dt = mgl . d\theta . \sin\theta .$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C_a \omega}{mgl} = \frac{mgl\rho\cos\theta}{J\Omega} .$$

Le redressement complet aura donc lieu en un temps fini, l'expression précédente montre qu'il est d'autant plus rapide que sa pointe est moins fine et que le contact est plus rugueux (*).

Cette conclusion est indépendante de la position du centre de gravité qui peut se trouver aussi bien en dessous qu'au-dessus du point d'appui; dans l'un cas comme dans l'autre, l'axe de la toupie se rapprochera de la verticale.

Supposons maintenant que la même pointe repose dans un godet ou une petite excavation en forme de calotte sphérique. C'est un cas intermédiaire entre les deux cas extrêmes qui viennent d'être traités: d'une part, la pointe libre de se déplacer sur un plan, et, d'autre part, la pointe dont le centre est maintenu immobile par une excavation conique.

A cause du frottement, le point de contact ne restera pas au point le plus bas de la cavité, il roulera à une certaine distance de ce point, mais ne pourra pas dépasser le petit cercle du godet le long duquel la normale fait avec la verticale l'angle de frottement.

Dès lors, le point de contact restant à l'intérieur d'une aire limitée, le mouvement résultant de la toupie sera une précession autour de la verticale passant par le centre O de la pointe à laquelle se superpose un déplacement de ce point O suivant un petit cercle horizontal.

(*) On se représentera la courbe sphérique décrite par un point de l'axe à l'unité de distance du point O, en combinant le mouvement de relèvement $\frac{d\theta}{dt}$ avec le mouvement horizontal $\frac{d\varphi}{dt}$ dû à la précession :

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = -\frac{f\rho}{l}\cos\theta\,.$$

C'est l'équation d'une spirale sphérique.

Lorsque l'axe de la toupie se rapproche de la verticale, θ devenant très petit, cos θ est sensiblement égal à l'unité et l'équation précédente exprime que $\frac{d\theta}{d\varphi} = C^{te}$, c'est-à-dire qu'un point de l'axe de la toupie décrit sensiblement autour de la verticale un *arc de spirale d'Archimède.*

En faisant une hypothèse différente, et que l'on peut discuter, sur l'expression de C_a, M. Baule (*56*) conclut que ce serait sensiblement un arc de loxodromie.

Nous ne pousserons pas plus loin l'étude de ce problème, et nous nous bornerons à remarquer que si le rayon de courbure du godet diffère peu de celui de la sphère terminant le pivot, et si le coefficient de frottement est faible, le point O restera pratiquement immobile et l'on pourra appliquer très sensiblement les conclusions trouvées dans l'hypothèse de la cavité conique, savoir:

L'axe de la toupie se rapprochera graduellement de la verticale, quelle que soit la position du centre de gravité de la toupie par rapport au point d'appui ; et ce mouvement de redressement sera d'autant plus rapide que la pointe sera moins fine.

Ces prévisions sont confirmées par les faits ; les expériences de Baule (*56*) sur une toupie Fleurias (voir plus loin) en fournissent une vérification très intéressante.

45. Gyrostat dont l'axe matériel est en contact avec un guide fixe. — Considérons la toupie représentée par la figure 27 et supposons que sa tige soit en contact avec un guide de forme quelconque, disons pour fixer les idées, un fil de fer contourné comme l'on voudra. Au point de contact, le frottement de la tige cylindrique, tournant sur elle-même, donne naissance à une force qui tend à entraîner l'axe comme s'il roulait sur le guide.

Souvenons-nous que pour déplacer artificiellement un point de l'axe, il faut exercer en ce point un effort normal au déplacement à produire, en appliquant la règle des trois doigts on vérifie sans peine que la précession forcée, amorcée comme il vient d'être dit, provoque un couple de réaction gyrostatique dont l'effet est de presser la tige du gyrostat normalement contre le guide, de manière à assurer la persistance du contact ; à la faveur de cette circonstance, l'axe continue à rouler contre le fil de fer.

L'axe semble adhérer au guide comme s'il était aimanté et rien n'est plus curieux que de voir la tige de la toupie suivre ainsi un contour si compliqué qu'il soit, même dans les angles les plus vifs ; lorsque la tige arrive à l'extrémité du guide, elle contourne cette dernière et suit en sens inverse le chemin qu'elle a parcouru pour y arriver.

Cette propriété existe, quelle que soit la position sur l'axe du point de contact avec le guide; elle a reçu une application ingénieuse dans le modèle du monorail Brennan.

46. Collimateur ou horizon gyrostatique Fleurias. — Les différentes questions qui viennent d'être traitées nous permettent de conclure qu'une toupie dont la pointe repose sur un plan, ou dans un godet concave, a une tendance marquée à se redresser et à « dormir » verticalement. D'autre part, nous avons vu que cet état est stable et enfin nous savons qu'un tel système sera d'autant moins sensible aux perturbations extérieures que sa période propre de précession sera plus longue (n° 38).

Ces considérations justifient l'idée d'employer une toupie pour établir un horizon artificiel.

Déjà en 1752 Serson (*3*) construisit un horizon artificiel basé sur ce principe, c'était une large toupie dont la partie supérieure portait un miroir; son emploi ne s'est pas répandu à cause des difficultés de maniement.

L'appareil moderne imaginé par Fleurias (*49*) constitue en quelque sorte un accessoire du sextant, il se place derrière le petit miroir de cet instrument et fournit directement un repère horizontal. Le collimateur se compose essentiellement d'une toupie en cuivre, en forme de tore, pesant 175 gr. et reposant par une pointe dure et fine dans une petite cavité sphérique, de telle façon que son centre de gravité G se trouve à moins d'un millimètre en dessous du point d'appui (fig. 45). Le mouvement est donné par un jet d'air comprimé qui frappe une série d'ailettes creusées dans la surface latérale du tore. Dans les modèles récents on estime que la vitesse ainsi communiquée au tore atteint 80 tours par seconde et qu'elle ne tombe à 50 tours qu'après un temps suffisant pour faire une observation.

La face supérieure de la toupie porte, aux extrémités d'un même diamètre, deux lentilles plan-convexes L et L′ sur la face plane desquelles est gravé, à la hauteur du centre optique, un trait de repère noir très fin, perpendiculaire à l'axe de la toupie. La distance qui sépare les deux lentilles est égale à leur distance focale principale, de telle sorte que

les rayons émanant du trait de repère de la lentille L, par exemple, sortiront de la lentille L′ parallèlement à l'axe optique du système et pourront former dans la lunette du sextant une image du repère qui sera au point en même temps que l'objet à l'infini (astre) dont on cherche la hauteur. Si l'axe de la toupie reste vertical, à cause de la rotation rapide et la persistance des impressions sur la rétine, l'observateur verra continuellement un trait horizontal qui pourra, par tous les temps, remplacer l'horizon de la mer.

Les inclinaisons communiquées au support par la main de

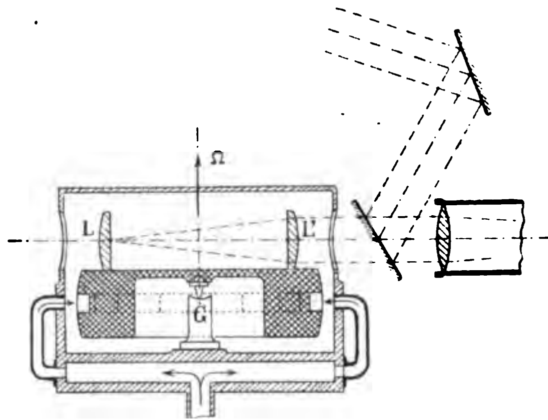


Figure 45.

l'observateur, et par le navire, n'auront aucun effet déviateur si la cavité est sphérique et la pointe très fine ; quant aux effets d'inertie dus aux accélérations horizontales, nous ne répéterons pas ce qui en a été dit au n° 38 ; les excursions angulaires de l'axe de la toupie qui peuvent en résulter seront d'amplitude d'autant moindre que la durée de la précession propre sera plus longue. L'expérience a prouvé que pour toutes les catégories de bâtiments, une période de précession de 120 secondes est suffisante, et permet de faire les observations avec toute la précision qu'exige la navigation astronomique.

Une cause assez inattendue, la rotation de la Terre, influe sur les mesures de hauteur prises au moyen du collimateur gyrostatique. En effet, au lieu de se ranger suivant la verti-

cale vraie du lieu, la direction que prend l'axe de la toupie fait avec cette droite un petit angle β dans le plan du méridien. Si la rotation du tore a lieu dans le sens indiqué par la figure 45, cette fausse verticale est inclinée vers le Sud, et inversement.

Nous établirons au n° 54 la relation suivante qui définit cette inclinaison β en fonction de la latitude λ et de la période de précession t de la toupie:

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{t \cos \lambda}{86400}. \qquad (77)$$

Cette formule peut être mise sous la forme plus pratique

$$\beta = \frac{t \cos \lambda}{25,14}$$

qui donne, en minutes d'arc, la pente du plan de visée par rapport à l'horizon vrai. Dans le cas cité plus haut ($t =$ 120 secondes), l'angle β peut atteindre 5′, cela explique comment des latitudes prises près de l'équateur ont pu différer de 10′ suivant que l'observation se faisait vers le Nord ou vers le Sud.

Il est à peine besoin de dire que la correction à introduire pour tenir compte de cette cause d'erreur dépend de l'azimut α dans lequel on opère et que cette correction sera en réalité:

$$\beta' = \frac{t \cos \lambda \,.\, \cos \alpha}{25.14}.$$

Le mouvement de précession, qui fait décrire à un point de l'axe de la toupie autour de la verticale un petit cercle (ou plus exactement un arc de spirale d'Archimède, voir n° 44, note), fait prendre au plan du collimateur une série de positions qui transportent la ligne de repère dans le champ de la lunette, de haut en bas puis de bas en haut, en passant par des positions intermédiaires, inclinées tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. Ce mouvement de libration du repère (auquel s'ajoutent encore de petits mouvements à courte période dus principalement au roulis), loin de nuire à la précision des lectures, a donné naissance à divers procédés d'observation qui permettent d'arriver à une très

bonne compensation des écarts. Nous ne dirons rien de ces méthodes dont la description nous écarterait de notre sujet, elles ont fait l'objet des études de Fleurias lui-même et plus récemment de Roosenburg (*88*) et de Favé (*89*).

III. — Problème du troisième genre. — Gyrostat entièrement libre, dans le vide ou dans un milieu résistant.

Ce troisième problème se ramène à l'application immédiate de la théorie de la rotation naturelle suivant laquelle un solide entièrement libre, est animé d'un mouvement de Poinsot, autour de son centre de gravité ; la direction de l'axe du moment cinétique restant invariable dans l'espace.

Si, à l'instant initial, l'axe du moment cinétique est dirigé suivant un des axes principaux, ce qui a lieu par définition pour les gyrostats, cet axe lui-même conservera une orientation invariable.

47. Gyroscope de Foucault. — Cet appareil consiste en un tore métallique monté dans une suspension à la cardan (fig. 46), de telle façon que les axes AA, BB et CC se coupent rigoureusement au centre de gravité du tore ; celui-ci peut donc recevoir tous les mouvements de rotation possibles sans cesser d'être en équilibre indifférent, ce qui le rend équivalent à un système entièrement libre.

Voici comment cet instrument permet de constater la rotation terrestre (*) :

(*) Le mot *gyroscope* signifie, d'après son étymologie, « appareil permettant de voir la rotation » ; dans l'esprit de Léon Foucault, ce terme devait désigner l'instrument capable de déceler la rotation de la terre sans le secours d'observations astronomiques.

L'expression choisie par l'illustre physicien devrait rester attachée à cette idée et c'est pour cette raison que nous avons adopté le mot *gyrostat* qui a un caractère plus général et doit correspondre au mot allemand *kreisel*.

Nous aurons justifié par le même fait l'expression *effet gyrostatique* qui nous semble mieux choisie que *effet gyroscopique*, pour désigner le phénomène général dont nous nous occupons.

Faisons abstraction de la masse des anneaux de suspension et ne considérons que le tore, mobile autour de son centre de gravité.

L'appareil étant entraîné dans le mouvement diurne, étudions son mouvement relatif par rapport à un système d'axes de comparaison ayant pour origine le centre de gravité du tore et dont les *directions sont absolument fixes*. Nous pouvons écrire les équations du mouvement du tore par rapport à ces axes de comparaison comme s'il s'agissait d'axes absolument immobiles, à condition de supposer appliquées en chacun de ses points les réactions d'inertie dues aux accélérations d'entraînement (les accélérations complémentaires sont nulles).

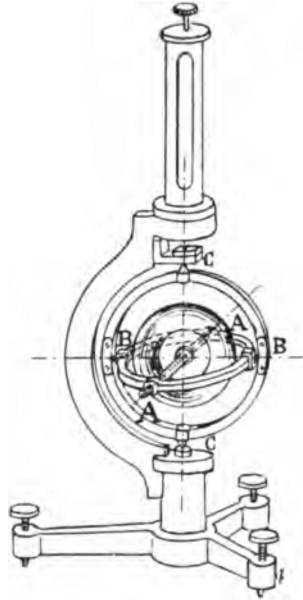


Figure 46.

Les dimensions du tore étant évidemment négligeables par rapport à celles de la terre, on peut considérer la résultante des réactions d'inertie, de même que la résultante des actions de la pesanteur, comme passant rigoureusement par le centre de gravité, origine des axes.

Les forces réelles et fictives passant par l'origine des axes, le mouvement du tore dans les axes de comparaison sera un mouvement de Poinsot; si son mouvement initial se réduit à sa rotation propre autour de son axe de figure, cet axe conservera une direction constante par rapport aux axes de comparaison. En d'autres termes, si l'axe AA est pointé vers une étoile fixe, il restera pointé vers la même étoile, et, pour un observateur terrestre, il se déplacera comme le ferait un instrument astronomique monté en équatorial.

Par exemple, à la latitude de Bruxelles, un gyroscope de Foucault pointé vers le zénith décrira en 5 minutes un angle $\omega_d \cos \lambda = 0{,}786°$, c'est un mouvement qui peut être parfaitement constaté, et même mesuré sous le microscope.

Causes d'erreur:

a) Lorsque l'on communique au tore la vitesse de rotation initiale Ω autour de son axe de figure, il est en même temps animé de la rotation diurne ω_d à laquelle participent le support ainsi que l'expérimentateur. A l'instant où l'appareil est abandonné par l'opérateur, le vecteur du moment cinétique fera donc un certain angle avec l'axe du tore, qui exécutera autour de lui un mouvement de Poinsot. Si les rotations Ω et ω étaient comparables, les directions de l'axe du tore et du vecteur du moment cinétique pourraient être très différentes; en fait, elles sont sensiblement confondues. Si le tore fait N tours par seconde, le rapport $\frac{\Omega_d}{\omega}$ sera $N \times 24 \times 3600$ et l'angle des deux vecteurs sera au maximum $\frac{1}{86400\ N}$ ou $\frac{2,43}{N}$ secondes d'arc.

b) Une deuxième cause d'erreur provient de ce que dans la démonstration précédente on fait abstraction des anneaux de suspension. En réalité, ils font partie du système et pendant que l'axe AA paraît se déplacer suivant le mouvement apparent des étoiles, les deux anneaux tournent autour des axes BB et CC avec des vitesses angulaires ω_1 et ω_2 telles que leur résultante reproduise la vitesse angulaire apparente de AA; ω_1 et ω_2 sont donc de l'ordre de grandeur de ω_d. L'ensemble du système a en réalité un moment cinétique donné par la somme vectorielle:

$$\overline{\mathfrak{M}} = \overline{J\Omega} + \overline{J'\Omega_d} + \overline{j_1\omega_1} + \overline{j_2\omega_2} ,$$

j_1 et j_2 sont les moments d'inertie des deux anneaux respectivement autour de BB et de CC. Le vecteur $\overline{\mathfrak{M}}$ sera donc très peu différent de $\overline{J\Omega}$ et si la rotation Ω est rapide, l'erreur due aux anneaux sera aussi peu importante que celle due à la vitesse angulaire initiale ω_d du tore.

c) Une autre source d'erreurs, de beaucoup la plus importante, réside dans les frottements qui font obstacle aux rotations des anneaux et ralentissent ω_1 et ω_2. De plus, sous

l'effet des frottements, l'axe AA sera plus ou moins entraîné dans le mouvement de la Terre, et ce déplacement agissant comme une précession forcée sur le gyrostat fera apparaître un couple de réaction et un nouveau terme perturbateur.

Ces diverses causes d'erreur ne se font heureusement guère sentir pendant des observations de peu de durée et elles n'ont pas empêché Foucault d'obtenir des vérifications très satisfaisantes (*).

48. Diabolo. — Le diabolo consiste en un corps de révolution, présentant la forme de deux troncs de cônes identiques accolés par leurs petites bases, auquel on communique au moyen d'une corde un mouvement de rotation assez rapide en même temps qu'on le lance en l'air.

On arrive à le faire tourner, à peu de chose près, autour de son axe de figure, qui est axe principal d'inertie, et il en résulte que cet axe conserve une direction constante généralement horizontale pendant la durée du jet; cela permet de rattraper assez facilement le diabolo, d'où l'intérêt de ce jeu qui, pour le surplus, permet de vérifier plusieurs des principes énoncés plus haut:

a) Si l'un des cônes est plus lourd que l'autre, il se produit un mouvement de précession, l'axe du diabolo reste bien horizontal, mais tourne dans le plan horizontal ;

b) Si accidentellement le joueur donne une impulsion

(*) Léon Foucault, avant tout expérimentateur, n'a pas cherché à donner de ses expériences une démonstration rigoureuse ; au contraire, des mathématiciens comme Quet (*18*), Bour (*27*), Villarceau (*22*) et Gilbert (*38*), en ont fourni de très complètes et peut-être inutilement compliquées. Ils appliquent les théorèmes du mouvement relatif et supposent les forces variables dans l'étendue du gyroscope, ce qui les conduit à des équations renfermant jusqu'à des termes en $\omega^2{}_d$ certainement négligeables.

La solution que nous avons utilisée et qui rattache la question à la théorie de la rotation naturelle a le double avantage de n'exiger aucun calcul et d'être tout aussi correcte, elle a été indiquée par Massau (*44*) et par Guyou (*52*).

Remarquons en passant que si la théorie de Quet est plus complète, elle n'en néglige pas moins l'influence des anneaux et les frottements, c'est-à-dire deux causes d'erreurs que l'expérimentateur ne pourra jamais ni éviter ni prévoir avec précision.

énergique autour d'un axe différent de l'axe de figure, on obtient un mouvement de Poinsot bien visible ;

c) Si pendant qu'on lance le diabolo, il s'incline vers l'avant ou vers l'arrière, le joueur devra exercer un couple à axe vertical en avançant ou reculant un des brins de la corde. L'application de la règle des trois doigts permet de formuler la règle générale: pour ramener l'axe à être horizontal, il faut déplacer le brin menant de la corde vers la partie qui se soulève ;

d) L'axe de rotation du diabolo correspond en général à un moment d'inertie minimum ou maximum (ellipsoïde de révolution allongé ou aplati), le mouvement de rotation est stable.

Si les moments d'inertie sont rendus tous égaux, l'ellipsoïde se réduit à une sphère et tous les axes sont également stables ou plutôt indifférents; aucun d'eux n'est plus stable que ses voisins et si le diabolo est quelque peu dérangé, le mouvement qui commence autour d'un axe peut se continuer autour d'un autre. M. Boys a construit un diabolo présentant cette propriété curieuse d'être inutilisable pour les joueurs en réalisant avec beaucoup de précision l'égalité des moments d'inertie.

49. Altération du mouvement de Poinsot dans un fluide résistant. — Stabilité particulière des gyrostats a ellipsoide d'inertie aplati. — Supposons que le mouvement de notre gyrostat entièrement libre soit devenu, pour une raison accidentelle quelconque, un mouvement de Poinsot, et supposons-le abandonné à son inertie, non plus dans le vide, mais dans un milieu résistant tel que l'air. Cherchons comment le frottement du fluide, qui altère continuellement le moment cinétique du système, influera sur son mouvement ultérieur.

Reprenant le raisonnement déjà utilisé au n° 37, nous pouvons dire que le frottement du milieu produit un couple résistant C_f dont le vecteur représentatif est dirigé en sens inverse du vecteur de la vitesse instantanée de rotation et dont la longueur est fonction de cette vitesse.

Or, nous savons que le vecteur GR, dont la direction définit celle de C_f, décrit le cône d'herpolhodie (de demi-angle $RG\mathfrak{M}$) en tournant autour de $G\mathfrak{M}$; dès lors, l'extrémité de $G\mathfrak{M}$, continuellement entraînée dans la direction de C_f, décrira autour de la direction $G\mathfrak{M}$, que nous prenons comme direction initiale du moment cinétique, une ligne hélicoïdale (fig. 47).

Pendant le mouvement, le vecteur $G\mathfrak{M}$ conserve une direction moyenne constante, mais sa longueur décroît continuellement.

Examinons, d'autre part, les positions successives du solide par rapport à $G\mathfrak{M}$. A cet effet, représentons une section méridienne, de l'ellipsoïde d'inertie, qui contient les trois vecteurs GF, GR et $G\mathfrak{M}$ ainsi que le vecteur C_f. On trouve aisément les positions relatives des trois vecteurs et on peut suivre de proche en proche leurs déplacements relatifs sous l'influence du couple extérieur appliqué C_f. En même temps que le vecteur $G\mathfrak{M}$ diminue de longueur, sans cesser de conserver la même direction moyenne, l'angle $\mathfrak{M}$ GE diminue peu à peu en même temps que l'angle EGR.

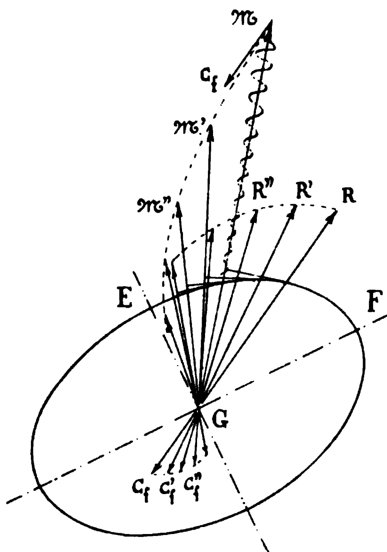


Figure 47.

Les directions $G\mathfrak{M}$ et GR en se rapprochant graduellement finissent par se confondre avec la direction du petit axe GE de l'ellipsoïde.

On peut conclure de là que le mouvement de Poinsot tend à se transformer en une rotation autour du petit axe de l'ellipsoïde d'inertie.

Dans le cas d'un système à ellipsoïde central d'inertie de révolution allongé, la rotation finira par s'établir autour d'un diamètre équatorial de cet ellipsoïde.

Si, au contraire, l'ellipsoïde central d'inertie de révolution est aplati, les raisonnements qui précèdent subsistent, il suffit de convenir que dans la figure 47 le diamètre GE représente l'axe de figure du système, pour conclure que le mouvement de Poinsot se transforme peu à peu en une rotation autour de l'axe de figure.

Au premier chapitre nous avons conclu que le mouvement est stable en tout cas autour de l'axe de figure de l'ellipsoïde; il s'agissait de mouvements dans le vide comme les comprend la mécanique rationnelle; nous trouvons ici

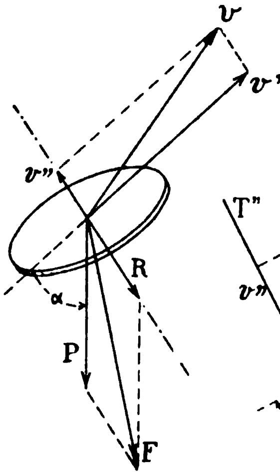


Figure 48.

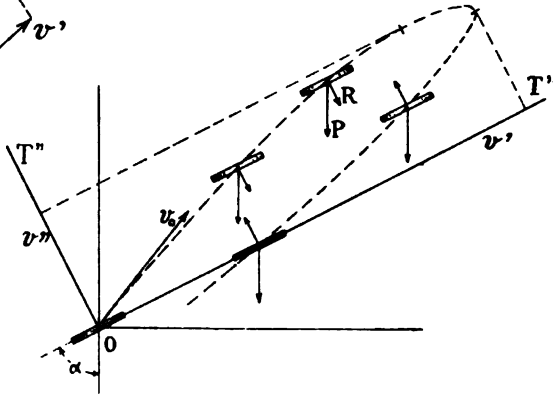


Figure 49.

que dans la réalité physique cette conclusion n'est vraie que si l'ellipsoïde est aplati.

Nous devons conclure de là qu'un diabolo sera plus stable si son ellipsoïde d'inertie est aplati que s'il est allongé.

Cette démonstration explique également la remarquable stabilité d'orientation, que chacun a pu vérifier, des disques lancés dans l'air.

50. Disque. — Palet. — Boomerang. — Considérons un disque mince lancé dans une direction quelconque et animé en même temps d'une rotation rapide autour d'un axe normal à son plan.

D'après ce que nous venons de rappeler, ce disque con-

servera une orientation constante comme le gyroscope ou le diabolo; lancé dans le vide, son centre de gravité décrirait une parabole contenue tout entière dans un plan vertical; dans l'air, au contraire, il peut décrire une trajectoire gauche de forme très particulière.

En effet, soit à un instant quelconque v la vitesse du disque, $P = mg$ son poids et R la résistance de l'air, normale au plan comme l'on sait, et que nous supposons appliquée au centre du disque (*). L'état de sollicitation est dès lors indiqué par la figure 48 et l'équation différentielle du mouvement peut s'écrire sous forme vectorielle:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} ,$$

F étant la résultante des deux forces P et R. Le vecteur R n'étant pas forcément dans le même plan vertical que P et v, on voit dès maintenant que la trajectoire peut sortir du plan vertical initial du jet.

Pour étudier la forme de cette trajectoire, écrivons deux équations de projection, l'une sur un plan parallèle à la direction invariable du disque, l'autre sur une normale à ce plan; désignons par v' et v'' les projections de v, et appelons α l'angle constant du plan du disque avec la verticale.

Nous aurons pour le mouvement projeté sur le plan:

$$m \frac{dv'}{dt} = P \cos \alpha .$$

C'est l'équation classique dont l'étude conduirait sans peine à trouver que la trajectoire projetée sera celle d'un projectile ordinaire dans le vide, ce sera donc une parabole et, dans un cas particulier, une droite parcourue successivement

(*) On sait que la résistance est normale au disque et que son point d'application ne sera pas au centre, mais un peu en dehors du côté de l'arête d'attaque. Nous pouvons supposer la résistance transportée au centre moyennant l'application d'un petit couple dont l'effet sera de faire précessionner lentement le disque. Nous supposons ici que le moment cinétique du disque est assez grand pour que les désorientations dues à cette précession ne soient pas sensibles pendant la durée du jet.

dans les deux sens; dans l'espèce, il s'agirait de la ligne de plus grande pente du plan (cela correspondrait, pour le projectile dans le vide, au cas d'un jet vertical).

Pour le mouvement projeté sur la normale au plan du disque, nous aurons:

$$m \frac{dv''}{dt} = \mathrm{R} + \mathrm{P} \sin \alpha .$$

C'est l'équation du mouvement d'un disque lancé verticalement en présentant sa plus grande surface au milieu résistant; sans formuler d'hypothèse sur la nature de la résistance, nous pouvons dire que le mouvement varié au début se transformera rapidement, eu égard à la résistance du milieu, en un mouvement à vitesse uniforme.

En combinant les deux mouvements ainsi définis, on peut être conduit à une grande variété de trajectoires gauches.

Si le disque est léger et sa surface assez grande, le mouvement normal au disque est peu marqué pendant la durée du jet, la trajectoire est à peu près plane et le disque semble décrire dans l'air une parabole en glissant sur un plan invisible. C'est l'expérience que répètent les joueurs de cartes adroits lorsque, pour envoyer une carte à leur partenaire, ils lui font décrire une trajectoire courbe et assez longue.

Un cas particulier plus curieux est celui où le mouvement projeté sur le plan initial du disque se réduit à un parcours rectiligne aller et retour sur la ligne de plus grande pente de ce plan; dans ce cas, la trajectoire réelle est plane. En combinant les deux mouvements projetés sur OT′ et OT″ (fig. 49), on obtient une trajectoire plane se composant de deux branches qui peuvent être très peu différentes (*).

Remarquons en passant que la trajectoire de descente du disque ressemble assez bien au trajet d'un aéroplane atterrissant en vol plané.

Cette propriété remarquable des projectiles aplatis, animés d'une grande vitesse de rotation dans leur plan, de pouvoir présenter une trajectoire rétrograde, trouve une application dans l'arme australienne, le boomerang.

(*) Mais non pas identiques, comme l'indiquent la plupart des auteurs (COLLIGNON, *Tr. de Mécanique*, t. III, p. 622).

IV. — Problème du quatrième genre. — Gyrostat lié a un système participant a un mouvement d'entrainement, en particulier a la rotation terrestre. — Gyroscopes.

51. Cas général. — Un gyrostat est monté de telle manière que son axe peut tourner autour de son centre de gravité sans sortir d'un plan déterminé. On demande quels seront les mouvements de l'axe et les réactions qu'il exercera lorsque ce plan se déplacera dans l'espace.

Les translations étant sans effet, nous pouvons supposer le mouvement d'entraînement auquel participe le plan, réduit à une rotation de vitesse angulaire $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$.

En général, l'axe de cette rotation fera avec le plan considéré un angle φ, et nous pouvons décomposer la vitesse angulaire ω en deux autres: $\omega \sin \varphi$ autour d'une normale au plan et $\omega \cos \varphi$ autour de la projection de $\overline{\omega}$ sur le plan (fig. 50).

La première de ces rotations sera sans effet, car le couple de réaction gyrostatique qu'elle peut faire naître sera neutralisé à chaque instant par les liaisons qui maintiennent l'axe du gyrostat dans le plan P.

La seconde rotation d'entraînement, qui reste seule à considérer, peut se décomposer en deux autres ω_x et ω_y

$$\omega_x = \omega \cos \varphi \cos \delta \quad \text{autour de l'axe de figure (J)}$$

$$\omega_y = \omega \cos \varphi \sin \delta \quad \text{autour d'un diamètre (I),}$$

δ est l'angle que fait à un instant quelconque l'axe du gyrostat avec GR direction de la projection de la rotation d'entraînement sur le plan P.

ω_x et ω_y sont les vitesses d'entraînement du gyrostat; les composantes de son moment cinétique suivant les mêmes axes seront:

$$\mathfrak{M}_x = J\ (\Omega + \omega \cos \varphi \cos \delta)$$

$$\mathfrak{M}_y = I\ \omega \cos \varphi \sin \delta$$

Les couples gyrostatiques qui en résultent se réduisent à un seul dont l'axe est normal au plan; il peut s'obtenir directement par la règle des trois doigts ou par l'emploi de l'une des formules (32) du n° 16:

$$C_z = \mathfrak{M}_x \omega_y - \mathfrak{M}_y \omega_x \, .$$

On en déduit:

$$C = J\Omega\omega \cos \varphi \sin \delta + (J-I)\omega^2 \cos \varphi \sin \delta \cos \delta \, . \quad (67)$$

Tel est le couple qui tend à entraîner l'armature du gyro

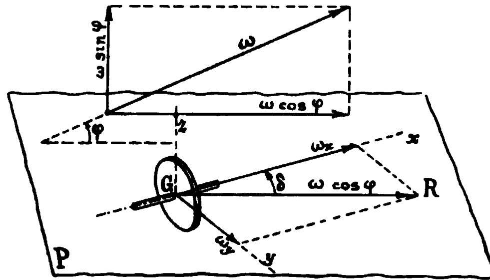


Figure 50.

stat dans son plan de liberté. (On remarquera qu'une relation semblable a été trouvée au n° 24.)

L'équation du mouvement du gyrostat dans le plan P sera:

$$I \frac{d^2\delta}{dt^2} + J\Omega\omega \cos \varphi \sin \delta + (J - I)\, \omega^2 \cos \varphi \sin \delta \cos \delta = o \quad (68)$$

I représente ici le moment d'inertie du gyrostat et de son armature autour d'une normale au plan P.

Si l'on peut dans cette équation négliger le terme $(J-I)\,\omega^2$ devant $J\Omega$, elle se simplifie et devient:

$$I \frac{d^2\delta}{dt^2} + J\Omega\omega \cos \varphi \sin \delta = o \, , \quad (69)$$

équation du mouvement d'un pendule simple dont la période des petites oscillations est:

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{I}{J\Omega\omega \cos \varphi}} \cdots$$

En résumé, on peut dire que l'axe du gyrostat sera animé

d'un mouvement pendulaire de part et d'autre d'une direction moyenne donnée par la projection de l'axe de la rotation d'entraînement sur le plan de liberté.

En pratique, par suite des résistances passives, les oscillations seront d'amplitudes décroissantes et l'axe du gyrostat s'arrêtera finalement suivant la direction de cette projection.

On peut exprimer autrement la même conclusion en disant que l'axe du gyrostat tend à faire le plus petit angle possible avec l'axe du mouvement d'entraînement, et on peut ajouter, cela se démontre sans peine, de manière à ce que la rotation propre soit de même sens que la rotation d'entraînement.

Nous retrouvons donc une nouvelle manifestation de la tendance au parallélisme des axes de rotation, qui peut servir à déceler et même à mesurer la vitesse angulaire d'entraînement ω lorsque celle-ci est inconnue; c'est ce qui a été fait pour la rotation terrestre.

52. Expériences de Foucault. — Au moyen de l'appareil déjà décrit (fig. 46), Foucault a exécuté deux expériences célèbres qui exigent que les tourillons fixes CC se trouvent exactement sur une verticale et que le diamètre BB du cercle extérieur soit normal à CC, de manière à ne pas sortir d'un plan horizontal.

Première expérience. — On amène l'axe AA à être bien horizontal et on empêche l'anneau ABAB de tourner autour de BB, ce qui astreint l'axe du tore à rester horizontal pendant les déplacements en azimut de l'anneau BCBC.

L'angle φ de l'axe de la rotation d'entraînement avec le plan horizontal est ici la latitude que nous désignerons par λ, et la direction de la projection de l'axe du mouvement d'entraînement sur le plan horizontal n'est autre que le méridien du lieu.

La relation (67) dont nous supprimons le terme négligeable en ω^2 donne

$$c = J\Omega\omega \cos\lambda \sin\delta , \qquad (70)$$

couple sous l'influence duquel l'axe du tore effectuera de part et d'autre de la ligne Nord-Sud une série d'oscillations. Lorsque les résistances passives auront amorti ces oscillations, l'axe indiquera la direction du méridien et, avec les conventions admises, la pointe du vecteur Ω indiquera la direction du Sud.

L'axe du gyroscope se comporte par rapport au méridien géographique comme le fait une aiguille aimantée par rapport au méridien magnétique. L'analogie est très complète; en effet, l'équation du mouvement angulaire de l'aiguille aimantée est de la forme:

$$I \frac{d^2\delta}{dt^2} + \mathcal{A}\mathcal{H} \sin \delta = o \ .$$

Pour le cas du gyroscope, elle est:

$$I \frac{d^2\delta}{dt^2} + J\Omega\omega \cos \lambda \sin \delta = o \ , \qquad (71)$$

le terme qui correspond au moment magnétique $\mathcal{A}\mathcal{H}$, et que nous appellerons « couple directeur », est $J\Omega\ \omega \cos \lambda$; il est maximum à l'équateur et devient nul aux pôles. Pour la boussole magnétique également, la composante horizontale varie dans le même sens de l'équateur au pôle, mais suivant une loi moins régulière.

Exemple numérique. — L'élément qui confère à une boussole ses qualités essentielles, la sensibilité et la stabilité, est la grandeur du couple directeur dont on se fera une idée numérique en évaluant le moment qu'il faut exercer sur l'aiguille pour la maintenir perpendiculaire au plan du méridien.

Dans le cas d'un compas magnétique, ce couple a pour expression $c = \mathcal{A}\mathcal{H}$.

$\mathcal{A}$ est le moment magnétique (pour un compas de navire, environ 3000 dynes-centimètres).

$\mathcal{H}$ est la composante horizontale du champ magnétique (en Belgique environ 0.2 Gauss).

$$c = \mathcal{A}\mathcal{H} = 3000 \times 0{,}2 = 600 \text{ dynes-centimètres},$$

soit un couple de 0,612 gramme-centimètre.

Dans le cas d'une boussole gyroscopique, le couple cor-

respondant sera exprimé par $J\Omega\omega \cos \lambda$. Pour un appareil comparable au précédent, comme encombrement, nous adopterons les dimensions des éléments d'un gyrocompas Anschutz Kaempfe (voir nos 55-57) :

Tore de 6 kilos, $J = 612$ gr. $\overline{cm}^2$, $\Omega = 2090$ rad/sec, $\omega_d = 0{,}000072$ rad/sec , $\lambda = 45^o$

$$c = 612 \times 2090 \times 0{,}000072 \times 0{,}707 = 65 \text{ gr.-cm.}$$

A égalité d'encombrement, la boussole gyrostatique de l'exemple choisi aurait donc un couple directeur environ 100 fois plus fort que le compas magnétique.

Il est vrai que l'inertie de la masse à entraîner par ce couple est au moins 10 fois plus importante dans l'appareil gyroscopique que dans le compas magnétique ; au point de vue de la force directrice, l'avantage n'en restera pas moins au premier de ces deux instruments.

Deuxième expérience. — Dans cette deuxième expérience de Foucault, c'est l'articulation autour de CC que l'on immobilise, de sorte que AA est astreint à demeurer dans un plan vertical.

On oriente le plan de liberté de l'axe AA dans le plan du méridien et l'on observe qu'après une série d'oscillations l'axe vient se ranger parallèlement à l'axe du monde en faisant un angle λ avec l'horizon.

La démonstration est la même que pour la première expérience ; dans la formule (70) du cas précédent, il y a simplement lieu de faire $\varphi = o$, ce qui donne

$$c = J\Omega\omega \sin \delta .$$

L'axe du tore se comporte ici comme l'aiguille d'une boussole d'inclinaison avec cette différence qu'il permet de déterminer directement la latitude.

Une autre différence provient de ce que le couple directeur $J\Omega\omega$ est indépendant de la latitude, tandis que pour une boussole d'inclinaison magnétique, ce couple varie comme l'intensité de la composante horizontale.

Remarque. — De ces deux expériences, Foucault (*11*) a

pu conclure pour la première fois que: «... sans le secours d'aucune observation astronomique, la rotation d'un corps à la surface de la Terre suffit à indiquer le plan du méridien... et la latitude du lieu, le méridien étant connu ».

En réalité, le mouvement de la Terre étant très lent, la force motrice qui tend à orienter l'axe du gyroscope est très faible et il suffit de résistances très petites pour contrarier le mouvement. D'autre part, le frottement de l'air empêche le tore une fois lancé de conserver longtemps sa grande vitesse de rotation. Pour ces deux raisons, l'appareil tel qu'il fut conçu par Foucault (fig. 46), ne permet pas de déterminer le méridien avec une bien grande exactitude.

Au moyen de méthodes plus modernes, en constituant le gyroscope par un volant assez lourd entraîné d'une manière continue par un électromoteur, le tout étant supporté par une très longue suspension trifilaire, le professeur Föppl (*74*) a obtenu des résultats d'une précision beaucoup plus grande.

53. Barogyroscope de Gilbert. — Dans les expériences de Foucault, le centre de gravité de l'équipage mobile doit coïncider exactement avec le point de suspension (croisée des trois axes), c'est là une condition très difficile à réaliser et que Gilbert (*38*) a voulu éviter dans son barogyroscope.

Cet appareil (fig. 51) consiste en un tore ou gyrostat dont l'axe peut osciller dans un plan vertical, mais dont le centre de gravité G ne se trouve pas sur l'axe de suspension OO′.

Soit OT′ (fig. 52) la projection de l'axe de la terre sur le plan d'oscillation du barogyroscope, si δ est l'angle que fait à un instant quelconque l'axe OG avec la droite OT′, nous pouvons exprimer le couple de réaction gyrostatique dû au mouvement diurne, comme dans le cas général, par:

$$J\Omega\omega \cos\varphi \sin\delta ,$$

le couple de la pesanteur sera:

$$mgl \sin\beta ,$$

l étant la distance OG, l'équation du mouvement de l'axe du tore dans le plan d'oscillation sera :

$$A \frac{d^2\beta}{dt^2} + J\Omega\omega \cos \varphi \sin \delta + mgl \sin \beta = o . \qquad (72)$$

Pour transformer cette équation, désignons par λ' l'angle que fait avec l'horizontale la projection OT′ de l'axe de la

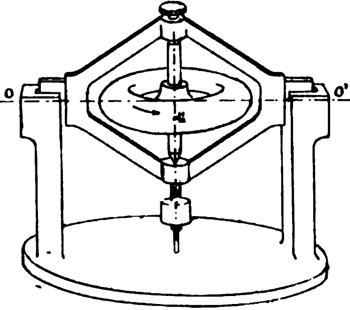


Figure 51.

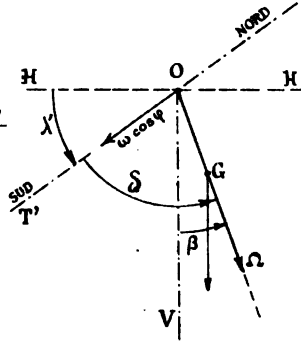


Figure 52.

Terre et β l'angle compté positivement vers le Nord que fait l'axe OG avec la verticale descendante, on déduit de la figure 52:

$$\delta = \frac{\pi}{2} + \beta - \lambda'$$

et

$$\sin \delta = \cos (\lambda' - \beta) = \cos \lambda' \cos \beta + \sin \lambda' \sin \beta ,$$

de là l'équation: (73)

$$A \frac{d^2\beta}{dt^2} + (J\Omega\omega \cos \varphi \sin \lambda' + mgl) \sin \beta + J\Omega\omega \cos \varphi \cos \lambda' \cos \beta = o .$$

Dans cette équation nous avons encore l'angle φ de l'axe du monde avec le plan d'oscillation ainsi que l'angle λ', nous pouvons les remplacer par λ latitude du lieu, et α azimut du plan d'oscillation, en remarquant que:

$$\sin \lambda' \cos \varphi = \sin \lambda ,$$
$$\cos \varphi \cos \lambda' = \cos \lambda \cos \alpha .$$

L'équation (73) devient alors: (74)

$$A\frac{d^2\beta}{dt^2} + (J\Omega\omega \sin\lambda + mgl)\sin\beta + J\Omega\omega\cos\lambda\cos\alpha\cos\beta = o\ .$$

C'est l'équation d'un mouvement d'oscillation de part et d'autre d'une position d'équilibre qui diffère de la verticale.

La loi exacte du mouvement étant sans intérêt, on peut se borner à tirer de l'équation (74) la période des petites oscillations qui s'obtient facilement lorsque β est petit (ce qui est le cas général, comme on le verra plus loin) en faisant $\sin\beta = \beta$ et $\cos\beta = 1$.

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{A}{J\Omega\omega\sin\lambda + mgl}}\ .$$

On peut également trouver la position d'équilibre du barogyroscope en écrivant qu'il y a égalité entre le couple gyrostatique et le couple de la pesanteur, ou, ce qui revient au même, en annulant $\frac{d^2\delta}{dt^2}$ dans l'équation (74) on trouve alors:

$$\text{tang}\ \beta_0 = \frac{-J\Omega\omega\cos\lambda\cos\alpha}{mgl + J\Omega\omega\sin\lambda}\ . \qquad (75)$$

Nous pouvons donc dire que le barogyroscope manifeste la rotation terrestre par un petit angle β_0 de son axe avec la verticale.

Cet angle β_0 croît du pôle à l'équateur, il est d'autant plus grand que mgl est plus petit et, à une latitude donnée, il est maximum lorsque le plan d'oscillation est orienté dans le méridien, ce qui correspond à $\alpha = o$.

La discussion de la relation (75) permet de faire certaines remarques:

a) Si $l = o$, on obtient $\text{tang}\ \beta_0 = \frac{\cos\alpha}{\text{tang}\ \lambda}$, la position d'équilibre est confondue avec la projection OT′ de l'axe de la terre sur le plan d'oscillation; on se trouve dans les conditions de la deuxième expérience de Foucault exécutée dans un plan formant un angle α avec le méridien.

b) Si la rotation Ω est positive, c'est-à-dire si le vecteur Ω est dirigé dans le même sens que la longueur l, de O vers G (cas de la figure 52), la déviation moyenne β_0 a lieu vers le Sud. Si Ω est négatif, la déviation a lieu vers le Nord, à moins que l'on n'ait $mgl < J\Omega\omega \sin \lambda$, ce qui ne peut avoir lieu que si l est extrêmement petit.

c) A égalité de vitesse angulaire Ω, la déviation sera plus grande si Ω est positif que s'il est négatif.

Nous avons retrouvé ainsi les principales propriétés du barogyroscope indiquées dans le mémoire de Gilbert (*38*), mais par une méthode beaucoup plus rapide.

54. Remarque. — Fausse verticale indiquée par un pendule gyrostatique. — Si au lieu de ne pouvoir osciller que dans un plan, l'axe du barogyroscope était libre de s'orienter dans un azimut quelconque — si, par exemple, il était suspendu par un point comme un pendule gyrostatique — on déduit facilement de la démonstration précédente qu'après quelques oscillations il se rangerait suivant une direction d'équilibre établie dans le plan du méridien et faisant avec la verticale vraie un angle β donné par la relation

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{-J\Omega\omega \cos \lambda}{mgl + J\Omega\omega \sin \lambda}$$

que l'on peut écrire:

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{-\omega \cos \lambda}{\dfrac{mgl}{J\Omega} + \omega \sin \lambda}.$$

On reconnaîtra dans le premier terme du dénominateur la vitesse angulaire de précession du pendule gyrostatique considéré que l'on peut remplacer par $\frac{2\pi}{t}$, t étant la durée d'un tour complet de précession [voir n° 38, formule (60)], ce qui permet d'écrire, en ne tenant plus compte que de la valeur absolue de β:

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\omega \cos \lambda}{\dfrac{2\pi}{t} + \omega \sin \lambda}. \qquad (76)$$

Vu la valeur très faible de la vitesse angulaire ω du mouvement diurne $\omega = \frac{2\pi}{86400}$, le second terme du dénominateur sera en général négligeable comparativement au premier et on pourra écrire:

$$\tang \beta = \frac{t \cos \lambda}{86400}. \tag{77}$$

Cet angle β est celui qui mesure la pente du plan de visée dans l'horizon gyrostatique de Fleurias (n° 46).

55. Gyrocompas Anschutz-Kaempfe. — La compensation des compas de route magnétiques à bord des navires en acier portant des canalisations électriques devient de plus en plus difficile et il en est ainsi plus particulièrement pour les compas enfermés dans les sous-marins ou à l'intérieur de réduits cuirassés.

La découverte d'un succédané non magnétique de la boussole présentait donc un grand intérêt et les brillants résultats de Foucault devaient orienter les recherches vers le compas gyroscopique.

L'emploi d'un gyrostat à axe horizontal, comme dans la première expérience de Foucault (n° 52) est possible à terre où l'on peut réaliser un plan horizontal permanent, mais il n'en est plus ainsi à la mer.

Pour réaliser l'horizontalité de l'armature, il faudrait une suspension à la cardan sans frottement, et, de plus, pour assurer une certaine stabilité, le centre de gravité du système devrait se trouver plus bas que le centre de suspension. Or, s'il en est ainsi, l'appareil forme un pendule qui subit des réactions d'inertie à chaque mouvement de roulis et de tangage, comme à chaque changement de vitesse et à chaque gyration du navire; ces conditions spéciales compliquent singulièrement le problème. Dubois (*46*), puis Martienssen (*83*) ont été aux prises avec ces difficultés. et si leurs essais n'ont pas été couronnés de succès, ils ont préparé

la voie au Dr Anschutz-Kaempfe (*84*), qui est parvenu à établir un « gyrocompas » réellement pratique (*).

L'appareil représenté par les coupes schématiques des figures 53 et 54 comporte un flotteur F en forme de tore, porté par un bain de mercure M dont la cuve est suspendue à la cardan. Ce flotteur F porte l'appareil gyrostatique proprement dit G, ainsi que la rose du compas R.

L'appareil gyrostatique G est constitué essentiellement par un volant tournant autour de l'axe OO′ et dont le mouve-

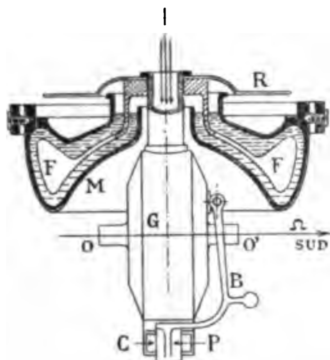


Figure 53.

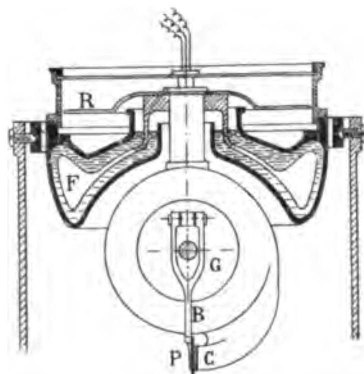


Figure 54.

ment de rotation très rapide et à vitesse constante est entretenu par un petit moteur à courant triphasé (**).

Si l'appareil était réduit à ces éléments, l'axe OO′ qui joue le rôle de l'aiguille aimantée, au lieu de rester dans la direction du méridien, oscillerait de part et d'autre de celui-ci, et, de plus, sa direction serait altérée chaque fois que le flotteur prendrait une petite inclinaison.

(*) L'ingénieur américain Sperry (*95*) paraît être arrivé également à un résultat satisfaisant ; cette étude était malheureusement déjà à l'impression lorsque la description de son gyrocompas fut publiée par *Engineering*.

(**) Dans un des modèles en service, le volant pèse 6 kilos, il fait 20000 tours par minute. Le courant triphasé est amené par des conducteurs (indiqués schématiquement sur les figures 53 et 54) qui pénètrent dans la partie centrale de l'équipage flottant et aboutissent à des contacts à mercure. La vitesse de régime n'est atteinte que 25 minutes environ après la fermeture des circuits ; de même une interruption de courant de 15 minutes n'a aucune influence sur les indications du compas.

Le frottement du flotteur contre le mercure, il est vrai, amortit plus ou moins ces oscillations, mais un amortissement plus énergique est nécessaire et le Dr Anschutz a établi à cette fin le dispositif suivant, d'une rare ingéniosité: le volant, grâce à sa grande vitesse de rotation, se comporte comme un ventilateur centrifuge, le carter qui l'enveloppe est percé d'ouvertures latérales par où l'air est aspiré, et porte un conduit terminé par un orifice rectangulaire C par où est refoulé un courant d'air horizontal perpendiculaire à l'axe OO'. Devant cette ouverture C vient se placer une petite palette P portée par un bras B, l'ensemble du bras et de la palette peut osciller très librement, de telle manière que si l'axe du gyrostat est horizontal, la palette P partage le courant d'air sortant de C en deux courants égaux (cas de la figure 53), tandis que si cet axe s'incline, les deux courants sont d'importance inégale et, par réaction, l'appareil est soumis à un couple à axe vertical. Comme nous le verrons, ce couple agit toujours dans le sens convenable pour amortir les oscillations horizontales de OO'.

56. *Equations d'équilibre. — Oscillations du gyrocompas.* — Nous savons par ce qui précède que l'axe du gyrostat cherchera à s'orienter dans le plan du méridien de telle façon que la pointe du vecteur Ω de la rotation propre, soit dirigée vers le Sud. Pour bien définir la position du système, appelons δ l'angle, compté positivement du Sud vers l'Est, que fait à un instant quelconque le plan vertical passant par l'axe OO' avec le méridien, et β l'angle de cet axe avec l'horizontale, compté positivement vers le bas du côté du Sud.

Les conditions d'équilibre du système se rapprochent à la fois de celles du gyroscope dans la première expérience de Foucault (n° 52) et de celles du barogyroscope (n° 53), mais ici le système est soumis à l'action des quatre couples suivants qui se combinent à l'action directrice de la rotation terrestre ω:

1° un couple de rappel à axe horizontal, dû à la pesanteur $mgl \sin \beta$, m étant la masse de l'ensemble du flotteur et de l'équipage gyrostatique, l la distance de son centre de gra-

vité au point fictif de suspension (métacentre du flotteur) ;

2° un couple à axe vertical, produit par la réaction inégale de l'air chassé par le conduit C et que nous pouvons désigner par $-k \sin \beta$;

3° et 4° deux couples de réaction gyrostatique, l'un à axe vertical $J\Omega \frac{d\beta}{dt}$, l'autre à axe horizontal $-J\Omega \frac{d\delta}{dt}$, dus respectivement aux déplacements angulaires β et δ agissant comme des précessions forcées.

Pour exprimer la condition d'équilibre autour de la verticale, il suffit de reprendre l'équation du mouvement horizontal du gyroscope dans la première expérience de Foucault, équation (71), et d'y introduire les termes:

$$J\Omega \frac{d\beta}{dt} \qquad \text{et} \qquad -k \sin \beta,$$

ce qui donne:

$$I \frac{d^2\delta}{dt^2} + J\Omega\omega \cos \lambda \sin \delta - J\Omega \frac{d\beta}{dt} + k \sin \beta = o. \qquad (78)$$

L'angle β qui intervient dans cette équation sera donné par une relation analogue à celle établie pour étudier le mouvement du barogyroscope. Nous savons par l'étude de cet appareil que l'angle β sera très faible et, dès lors, on peut sans erreur sensible exprimer le couple directeur dû à la rotation terrestre, agissant dans le plan vertical de OO′, par $J\Omega\omega \sin \lambda$, l'équation d'équilibre du système dans ce plan sera dès lors:

$$A \frac{d^2\beta}{dt^2} + J\Omega\omega \sin \lambda + mgl \sin \beta + J\Omega \frac{d\delta}{dt} = o. \qquad (79)$$

Equation analogue à l'équation (72) du barogyroscope, complétée par le terme $-J\Omega \frac{d\delta}{dt}$.

Les équations (78) et (79) définissent le mouvement de l'axe du gyrocompas supposé écarté de sa position d'équilibre; nous nous bornerons à les utiliser pour rechercher cette position d'équilibre et pour étudier les petites oscillations.

En faisant $\frac{d\delta}{dt} = \frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d^2\beta}{dt^2} = o$ on obtient les valeurs de δ et de β correspondant à la position d'équilibre:

$$\sin\beta_0 = \beta_0 = -\frac{J\Omega\omega \sin\lambda}{mgl}, \tag{80}$$

$$\sin\delta_0 = \delta_0 = -\frac{k \sin\beta_0}{J\Omega\omega\cos\lambda} = -\frac{k \operatorname{tang}\lambda}{mgl}. \tag{81}$$

Dans sa position d'équilibre, l'axe du gyrocompas n'est pas horizontal, il fait avec l'horizon un angle β_0 qui peut être rendu extrêmement petit en donnant une grandeur suffisante au produit mgl, tout comme dans le cas du barogyroscope. D'autre part, le plan vertical qui contient l'axe du gyrocompas fait un petit angle δ_0 avec le méridien, cela tient au fait que la palette P ne partage pas en deux parties égales le courant d'air sortant de G, puisque β_0 n'est pas nul; dès lors une déviation δ_0 est nécessaire pour que le couple directeur dû à la rotation terrestre, $J\Omega\omega\cos\lambda\sin\delta$, soit capable d'équilibrer $c \sin\beta_0$.

Pour étudier le mouvement de l'axe OO′ supposé très peu écarté de sa position moyenne ($\delta_0\beta_0$), nous simplifierons les équations (78) et (79) en supposant les angles δ et β confondus avec leurs sinus, et leurs cosinus égaux à l'unité; de plus, d'après ce que nous savons du barogyroscope, nous pouvons présumer que β sera toujours très faible, $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ sera également très faible et le couple A $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ pourra être négligé à côté des autres couples qui interviennent dans l'équation (79) (les résultats ultérieurs justifieront pleinement cette hypothèse). Les équations (78) et (79) s'écriront alors sous la forme simplifiée:

$$I\frac{d^2\delta}{dt^2} + J\Omega\omega\,\delta\cos\lambda - J\Omega\frac{d\beta}{dt} + k\beta = o\,, \tag{82}$$

$$J\Omega\omega\sin\lambda + J\Omega\frac{d\delta}{dt} + mgl\beta = o\,. \tag{83}$$

Eliminons β entre ces équations, on trouve:

$$\left(I + \frac{J^2\Omega^2}{mgl}\right)\frac{d^2\delta}{dt^2} + k\,\frac{J\Omega}{mgl}\frac{d\delta}{dt} + J\Omega\omega\cos\lambda\ \delta + \frac{k\,J\Omega\omega\sin\lambda}{mgl} = o\,, \tag{84}$$

équation du mouvement de l'axe OO′ projeté sur un plan horizontal; c'est une équation linéaire du second ordre de la forme:

$$a\frac{d^2\delta}{dt^2} + b\frac{d\delta}{dt} + c\delta + d = o\,, \tag{85}$$

tous les coefficients étant positifs, l'intégration conduira pour δ à une loi pendulaire amortie, ou à un mouvement apériodique, suivant que $b^2 - 4ac$ sera négatif ou positif. Lorsque le couple amortisseur $b\frac{d\delta}{dt}$ n'est pas très grand, ce qui est le cas ici, on a $b^2 < 4ac$ et la loi du mouvement est de la forme:

$$\delta = \delta_0 + \Delta e^{-\gamma t}\sin\frac{2\pi}{T}t\,. \tag{86}$$

Le facteur de décroissance exponentiel et la période sont définis par:

$$\gamma = \frac{b}{2a} = \frac{k\,J\Omega}{mgl\,I + J^2\Omega^2}\,, \qquad T = \frac{4\pi\,a}{\sqrt{4ac - b^2}}\,;$$

on voit que ces deux quantités sont sous la dépendance des éléments de l'appareil, notamment de k et de l.

La position d'équilibre de part et d'autre de laquelle se font les oscillations est donnée par $\delta_0 = \frac{-d}{c} = -\frac{k\tan\lambda}{mgl}$, c'est l'angle d'équilibre que nous connaissons déjà [formule (81)].

Le mouvement angulaire de l'axe du gyrocompas dans le plan vertical s'étudierait de la même manière, en éliminant δ entre les équations (82) et (83); on trouverait ainsi une équation différentielle en β de même espèce que l'équation (84).

Plus simplement, l'équation approximative (83) donne:

$$\beta = -\frac{J\Omega\omega \sin\lambda}{mgl} - \frac{J\Omega}{mgl}\frac{d\delta}{dt}.$$

et en tenant compte de (86):

$$\beta = \beta_0 + Be^{-\gamma t}\left(\gamma \sin\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\lambda}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (87)$$

Le mouvement vertical se ramène à la superposition de deux mouvements sinusoïdaux amortis, l'un en phase avec le mouvement horizontal, l'autre déphasé en avance d'un quart de période. Sans faire de calcul, on peut dire que le mouvement vertical (β) sera déphasé d'une certaine fraction de période en avance par rapport au mouvement horizontal (δ). Ce mouvement a lieu de part et d'autre de la position moyenne β_0 [formule (80)].

En combinant les deux mouvements exprimés par les équations (86) et (87), on se rend compte qu'un point de l'axe du gyrostat décrit une spirale dont le point asymptotique répond aux coordonnées δ_0 et β_0.

Pour nous représenter simplement ce résultat, faisons pour un instant abstraction de l'amortissement, c'est-à-dire supposons $\gamma = o$; dans ce cas, les deux mouvements simultanés de l'axe OO′ seraient deux mouvements périodiques non amortis déphasés rigoureusement d'un quart de période. L'extrémité du vecteur Ω (pointe Sud) décrirait une ellipse très aplatie (*) dont le centre correspond aux inclinaisons β_0 vers le haut, et δ_0 vers l'Ouest. Du déphasage d'un quart de période on conclut que l'inclinaison β aura sa valeur moyenne β_0 lorsque δ sera maximum, de même lorsque l'axe passera dans l'azimut moyen δ_0 l'inclinaison β atteindra ses maxima, vers le haut pendant une demi-oscillation de l'Ouest

---

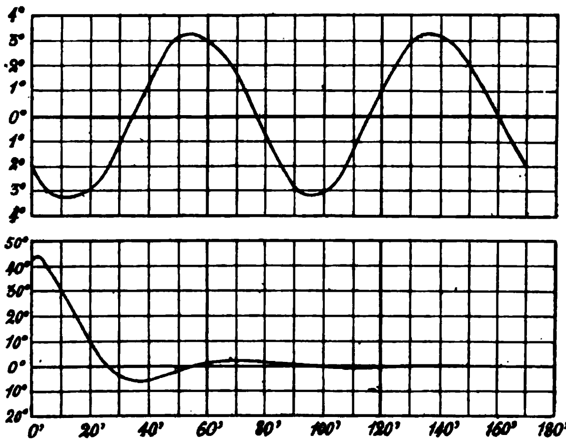
(*) En effet, calculons le rapport des deux axes qui est $\frac{B}{\Delta} = \frac{J\Omega}{mgl}\frac{2\pi}{T}$, pour l'exemple déjà cité plus haut (n° 52). $J\Omega = 612 \times 2090$, $mg = 6$ kilos, l peut être évalué à 10 cm, $T = 70' = 4200''$. D'où l'on tire :

$$\frac{B}{\Delta} = \frac{612 \times 2090 \times 6{,}28}{6000 \times 10 \times 4200} = 32.$$

vers l'Est et vers le bas pendant la demi-oscillation de retour.

En se rappelant maintenant le fonctionnement de la tuyère et de la palette, on vérifie aisément que le couple de réaction dû au courant d'air inégalement divisé agit toujours de manière à contrarier le mouvement horizontal d'oscillation.

De l'étude qui précède il résulte qu'en disposant judicieusement des éléments constructifs k et l, on peut réaliser un amortissement convenable des oscillations horizontales. Les



Figures 55 et 56.

deux figures 55 et 56 indiquent pour un même gyrocompas respectivement la courbe observée des oscillations non amorties et celle des oscillations amorties au moyen du dispositif décrit; la comparaison des deux courbes est significative. On remarquera incidemment que la période des oscillations horizontales est supérieure à 60 minutes, c'est une période très longue dont nous verrons plus loin la raison d'être.

57. *Corrections.* — Le gyrocompas, bien que n'étant pas influencé par les variations de la répartition du magnétisme terrestre, n'indique pas rigoureusement le Nord, et ses indications doivent subir certaines corrections.

a) Il faut en premier lieu compenser la déviation moyenne δ_0, cela se fait simplement en déplaçant la ligne de foi de la

quantité voulue. Cette correction croît de l'équateur au pôle, elle est de faible importance (3° au plus), il suffit de la reprendre de 10 en 10 degrés de latitude.

b) Une seconde correction à introduire résulte du fait que la vitesse propre du navire constitue, autour du centre de la terre, une vitesse angulaire qui se combine avec la vitesse angulaire du mouvement diurne et, par conséquent, le mouvement d'entraînement auquel le gyrostat est sensible, est une rotation résultante autour d'un axe qui diffère de la ligne des pôles.

L'axe OO′ du gyrocompas se dirigera donc suivant le grand cercle passant par un point voisin du pôle et faisant avec le méridien réel un angle δ_2 que l'on calcule facilement en fonction de la vitesse V du navire, de l'angle α que fait sa route avec le méridien et de la latitude λ, en appelant R le rayon de la terre:

$$\delta_2 = \frac{V \sin \alpha}{R\omega \cos \lambda}.$$

Cette déviation est indépendante des éléments du gyrocompas, et la correction peut en être calculée une fois pour toutes pour différentes vitesses, pour tous les caps et toutes les latitudes.

Dans le cas très défavorable d'un navire marchant à 24 nœuds perpendiculairement au méridien, cette correction est 1,53° pour $\lambda = 0°$ et n'atteint pas 5° pour $\lambda = 70°$.

c) L'ensemble gyrostatique est suspendu par un point fictif (métacentre du flotteur) qui n'est pas confondu avec son centre de gravité, il s'ensuit que toute modification dans le mouvement du navire: accélération, ralentissement, arrêt, gyration, provoquera une réaction d'inertie qui tendra à altérer la position d'équilibre du système.

Supposons, pour prendre un cas défavorable, que la réaction d'inertie en question soit dirigée parallèlement à l'axe OO′ dans le plan du méridien; il en résultera pour l'équipage flottant un couple analogue à celui qui incline un pendule de Desdouits. Ce couple, désignons-le par C, qui provoquerait uniquement une inclinaison de l'axe du tore dans le plan ver-

tical, s'il ne s'agissait pas d'un gyrostat, produira ici une précession horizontale de vitesse angulaire $\frac{d\delta}{dt}=\frac{C}{J\Omega}$, qui sera la cause d'une déviation

$$\delta_3=\int_{t_0}^{t_1}\frac{C}{J\Omega}\,dt.$$

Le calcul de cette déviation serait difficile et l'exactitude du résultat en serait toujours douteuse. Néanmoins, on peut déduire de l'expression de δ_3 que cette élongation sera d'autant moindre que le produit $J\Omega$ sera plus grand et le couple C plus faible ; or, le couple C peut s'exprimer en fonction de l'accélération j du centre de gravité $C=mjl$ et on peut dire que l'élongation δ_3 sera *grosso modo* proportionnelle à $\frac{mjl}{J\Omega}$. Pour réduire l'amplitude de δ_3, il convient donc que $J\Omega$ soit suffisamment grand et ml suffisamment petit; cela revient à donner au coefficient a de l'équation (85-84) une valeur considérable, et conduit à une période T assez longue.

Pratiquement donc, il faudra disposer des éléments constructifs de manière à assurer au système une période d'oscillation horizontale suffisamment longue pour que les excursions δ_3 soient maintenues dans des limites admissibles. L'expérience a démontré qu'une période de 70 minutes conduit à des élongations peu importantes, inférieures à 5°, même dans le cas le plus défavorable d'un arrêt brusque du navire. Il convient de remarquer qu'aussitôt la période de mouvement varié passée, l'axe du gyrostat retourne à sa position d'équilibre.

d) L'élongation, en quelque sorte balistique, qui vient d'être examinée, et qui accompagne chaque accélération à laquelle participe le gyrocompas, doit se produire également sous l'influence des mouvements normaux du navire: roulis, tangage, trépidations. L'expérience prouve, et la théorie permettait de prévoir, que ces mouvements parasites dont le plus lent a une période qui n'atteint pas 10 secondes sont

sans aucune influence sur le gyrocompas dont les oscillations se font en 70 minutes.

De ce qui précède on peut conclure:

Le gyrocompas a le grand avantage d'être absolument indépendant du champ magnétique dans lequel il se trouve.

Les corrrections à apporter à ses lectures sont simples.

La longue période de ses oscillations horizontales donne à ses indications une stabilité plus grande qu'à celles d'un compas magnétique, la gouverne est plus sûre, les embardées sont plus rares.

Le couple directeur est notablement plus fort que pour un compas magnétique (voir n° 52), ce qui permet d'employer un gyrocompas étalon dont les indications sont répétées à distance en divers points du bâtiment par une transmission électrique; on peut avoir ainsi 4 ou 5 compas répétiteurs dépendant d'un même compas étalon que rien n'empêche d'abriter dans un blockhaus ou sous un pont cuirassé.

CHAPITRE IV

STABILISATEURS GYROSTATIQUES

I. — Position du problème(*).

58. Considérations générales sur les appareils stabilisateurs et amortisseurs. — Il existe dans de nombreuses applications mécaniques des mouvements que l'on cherche à rendre aussi réguliers que possible en les débarrassant de mouvements parasites gênants, par des dispositifs appropriés : régulateurs, amortisseurs, stabilisateurs, etc.

D'autre part nous savons, par ce qui précède, qu'un gyrostat possède une résistance particulière aux désorientations et que, plus sa rotation est rapide, plus ses propriétés spéciales sont marquées.

Les phénomènes curieux que présentent la toupie et les gyroscopes, les projectiles èt les disques tournants, devaient attirer l'attention des inventeurs, aussi ont-ils bientôt cherché à faire intervenir l'effet gyrostatique dans l'établissement d'amortisseurs et de stabilisateurs.

(*) La notion de stabilité d'un mouvement est très difficile à définir d'une manière à la fois générale et précise, aussi pour les applications techniques ferons-nous usage d'une définition un peu particulière. Nous aurons affaire à des systèmes mobiles, généralement assimilables à des appareils de locomotion qui doivent suivre une certaine trajectoire et sont exposés en même temps à exécuter des *mouvements parasites ;* c'est à l'égard de ces derniers seuls que ces systèmes doivent être stables.

Nous dirons donc qu'un système est stable s'il est capable de supporter les actions perturbatrices qui agissent sur lui habituellement sans que son orientation soit modifiée d'une quantité supérieure à une limite assignée d'avance, et si, une désorientation s'étant produite, elle tend automatiquement à disparaître.

On a commencé par utiliser le gyrostat pour réduire les oscillations parasites des torpilles, des sous-marins, des navires et des aéroplanes, puis allant plus loin on a eu recours à ses propriétés pour établir de véritables stabilisateurs rendant possible, pour certains systèmes, la permanence d'un équilibre qui ne pouvait exister autrement sans l'intervention continue d'une action consciente, c'est le cas du monorail.

Avant de passer à l'analyse de ces dispositifs, il convient de rappeler qu'un mouvement à amortir ou à stabiliser pourra toujours être ramené à un mouvement périodique ou à une superposition de mouvements périodiques ; il y a lieu encore de faire une distinction entre les *systèmes normalement stables*, que l'on peut assimiler à un pendule ordinaire, et les *systèmes normalement instables*, par exemple la bicyclette.

Aux premiers (pendule, navire), il suffira d'un amortisseur pour contenir l'amplitude des oscillations entre certaines limites.

Pour les seconds (dont le pendule renversé du sismographe de Wiechert fournit un exemple complet), il faut d'abord un véritable stabilisateur pour rendre l'équilibre stable et, en plus, un amortisseur.

D'une manière générale, le système capable d'arriver à ces résultats devra rétablir, pendant des intervalles de temps successifs assez courts, l'équivalence entre le travail des forces perturbatrices et le travail des freins, compensateurs, etc. ; ce sera un système capable, en un mot, d'absorber ou de dépenser du travail à des instants opportuns (*).

Dans la réalisation, un amortisseur ou stabilisateur doit

(*) Les considérations qui suivent fixeront les idées sur la nature des forces à mettre en œuvre :

Pour stabiliser un système dans une orientation pour laquelle, normalement, il n'est pas stable, il faut exercer sur lui des forces qui tendent à le rappeler dans cette orientation, comme la pesanteur rappelle un pendule vers la verticale. Il faut pour cela exercer une action (force ou couple) fonction de l'élongation.

Pour amortir un mouvement périodique, il faut mettre en œuvre des forces qui auront une influence sur l'amplitude; il suffit pour cela d'introduire une *action résistante, fonction de la vitesse.* Une solution-type est donnée dans le cas d'un mouvement rigoureusement sinusoïdal par

donc comporter les organes suivants :

1° Un appareil sensible aux désorientations;

2° Un organe capable de produire ou d'absorber de l'énergie mécanique;

3° Une chaîne d'organes de transmission établis entre ces deux appareils, de telle façon que le second développera à l'instant voulu l'énergie nécessaire pour combattre les désorientations indiquées par le premier.

59. Utilisation de l'effet gyrostatique dans les stabilisateurs et amortisseurs. — Considérations générales sur leur installation. — Action indirecte et action directe. — Des considérations précédentes, il faut retenir surtout qu'un stabilisateur ou un amortisseur est essentiellement un système susceptible de fournir ou d'absorber du travail. Or, nous savons qu'un gyrostat dispose d'une

---

une action variant suivant une loi sinusoïdale de même période, mais déphasée en retard par rapport aux déplacements.

Soit le mouvement $\varphi = \Phi \sin \omega t$ et le couple $c = C \sin(\omega t - \delta)$, le travail accompli par le couple c aux dépens de l'énergie du système sera par période

$$\mathcal{T} = \int_o^T d\mathcal{T} = \int_o^T c \frac{d\varphi}{dt} dt = \frac{\Phi C}{2} \sin \delta \; . \qquad (88)$$

Ce travail est maximum pour $\delta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque le couple est à chaque instant dirigé en sens inverse de la vitesse angulaire; il est nul si δ est égal à 0 ou à π, dans ces deux cas en effet, le couple c serait alternativement amortisseur et excitateur pendant les quarts de périodes successifs; si $\delta = \frac{3\pi}{2}$ le travail $\mathcal{T}$ changerait de signe, le couple c serait excitateur.

Dans la pratique, pour réaliser un couple amortisseur, il faudra qu'il soit déphasé en retard par rapport au mouvement de 0 à π et si possible de $\frac{\pi}{2}$. En général, le travail d'amortissement sera proportionnel au sinus du déphasage, qui intervient ici comme le *facteur de puissance* des courants alternatifs.

On peut aussi recourir à un couple amortisseur suivant une loi périodique, mais non exactement sinusoïdale; le travail d'amortissement se déterminerait alors par une intégration graphique.

Enfin, on peut produire l'amortissement en agissant par percussions séparées, appliquées périodiquement en sens inverse du mouvement.

énergie cinétique constante et il ne peut être question de le considérer comme une source où l'on pourra prélever l'énergie nécessaire à la stabilisation; il ne pourra intervenir que comme organe sensible aux désorientations et éventuellement comme intermédiaire dans la chaîne des organes transmettant les efforts de stabilisation.

Cela étant, on entrevoit deux manières d'utiliser les propriétés de l'effet gyrostatique et nous pourrons ranger les stabilisateurs et amortisseurs utilisant cet effet en deux catégories; les appareils *à action indirecte* et les appareils *à action directe*.

Dans les premiers, le gyrostat jouera uniquement le rôle d'élément sensible aux désorientations; il agira sur le manipulateur d'un servo-moteur, il ne devra donc exercer que de faibles efforts, et pourra être de dimensions réduites.

Dans les seconds, le gyrostat sensible aux désorientations servira en même temps d'intermédiaire entre la source d'énergie et le système à stabiliser, il devra transmettre intégralement les efforts de stabilisation et sera par suite beaucoup plus important et plus lourd.

Avant d'aller plus loin, il convient de répondre à une objection que l'on ne manquera pas de formuler: puisque le gyrostat sert surtout comme organe sensible aux désorientations, un simple pendule ou un niveau liquide ne ferait-il pas aussi bien l'affaire?

Nous avons déjà eu l'occasion de signaler, au n° 37, une cause d'infériorité des pendules et des niveaux; on en trouvera une autre dans le fait que si même leurs indications étaient instantanées, ce qui exige que leur période soit très longue, leurs déviations seraient très faibles pour de faibles perturbations.

S'agit-il au contraire d'un gyrostat, aussitôt désorienté, il réagira en manifestant, suivant son mode de liaison, un couple de réaction sur ses appuis ou un mouvement de précession; il sera non seulement sensible à la désorientation, mais à la vitesse de celle-ci.

Un gyrostat conviendra donc particulièrement comme élé-

ment stabilisateur dans le cas d'un système exposé à des désorientations brusques.

Qu'il s'agisse d'un gyrostat à action directe ou à action indirecte, il faudra toujours provoquer l'apparition de couples de réaction gyrostatique, et pour en tirer le meilleur parti possible on devra tenir compte, dans la disposition des éléments, des remarques suivantes qu'il est bon de formuler une fois pour toutes.

a) L'axe du tore ne peut être disposé parallèlement à l'axe de l'oscillation qu'il s'agit de réduire ou de combattre — en effet, dans le cas contraire, le gyrostat ne subirait aucune précession et ne réagirait pas plus qu'en cas de non-rotation;

b) Il importe de donner à l'axe du tore une direction moyenne autant que possible normale à l'axe du mouvement d'oscillation à combattre — s'il n'en est pas ainsi, on peut décomposer le gyrostat en deux autres moins importants, dont l'un parallèle à l'axe d'oscillation sera sans aucune efficacité;

c) Lorsque l'axe du tore n'a pas une direction invariable dans le système, si, par exemple, il fait partie d'un équipage oscillant ou s'il est porté par une suspension à la cardan, il importe de limiter ses excursions de manière à ce qu'il ne puisse s'écarter de la normale à l'axe du mouvement à stabiliser au delà d'un certain angle (45° par exemple). Faute de prendre cette précaution, l'axe du tore arriverait à se placer parallèlement à l'axe d'oscillation et le gyrostat perdrait par le fait toute sensibilité.

II. — Appareils stabilisateurs a action indirecte

60. Dans cette catégorie d'appareils, le gyrostat joue uniquement le rôle d'organe sensible aux désorientations; il ne doit exercer que les faibles efforts nécessaires à la commande d'un servo-moteur et peut donc être de petites dimensions.

Si les déplacements parasites à combattre ne peuvent avoir lieu qu'autour d'un axe déterminé, il suffira que le gyrostat soit porté dans un équipage à un seul degré de liberté, de manière à ce que son axe puisse se mouvoir dans un plan passant par l'axe de l'oscillation à combattre, sa position moyenne étant normale à ce dernier axe (*).

Si des déplacements angulaires parasites peuvent se produire autour de deux axes, on établira le gyrostat de manière à ce que la position moyenne de son axe soit normale à la fois aux deux directions considérées; cela revient à établir le gyrostat dans une suspension à la cardan, dont les axes se coupent en son centre de gravité; il conservera dès lors une orientation fixe dans l'espace, comme un gyroscope de Foucault ou un diabolo, et les mouvements parasites se traduiront par des déplacements relatifs du gyrostat par rapport au système qui peuvent être utilisés pour commander des servo-moteurs. L'inconvénient de ce mode de fonctionnement est que le moindre balourd, comme la plus faible résistance anormale, produira une précession non prévue et enlèvera au gyrostat sa fixité de direction. Ce dispositif peut convenir si son intervention n'est pas de longue durée; dans tout autre cas, l'imperfection inévitable de la réalisation matérielle enlève au système sa précision.

Enfin, si une désorientation accidentelle peut se produire autour d'un axe quelconque, on pourra utiliser deux gyrostats indépendants en équilibre indifférent, ou mieux, trois gyrostats ayant chacun un seul plan de liberté.

61. Appareil Obry des torpilles Whitehead. — Pour assurer la stabilité de route des torpilles Whitehead on a recours à différents dispositifs, dont un des plus réputés, ima-

(*) En 1874, Bessemer établit un appareil destiné à rendre insensibles aux passagers, les mouvements de roulis d'un paquebot. Un salon était suspendu à l'intérieur de la coque; un mouvement de balancement transversal exactement opposé à celui du roulis devait lui être communiqué par des pistons hydrauliques. Le distributeur de l'eau sous pression était commandé par un gyrostat, dont l'installation était faite en méconnaissant les principes de l'effet gyrostatique; l'entreprise aboutit à un échec (*Engineering*, 9 octobre 1874).

giné par l'ingénieur autrichien Obry, est basé sur l'emploi d'un gyrostat.

La progression de la torpille dans l'eau est assurée par deux hélices mues par un moteur à air comprimé, le réservoir à air comprimé à 120 atmosphères constitue la source d'énergie que l'on utilise pour la stabilisation.

Lorsque la torpille traverse le tube de lancement, une

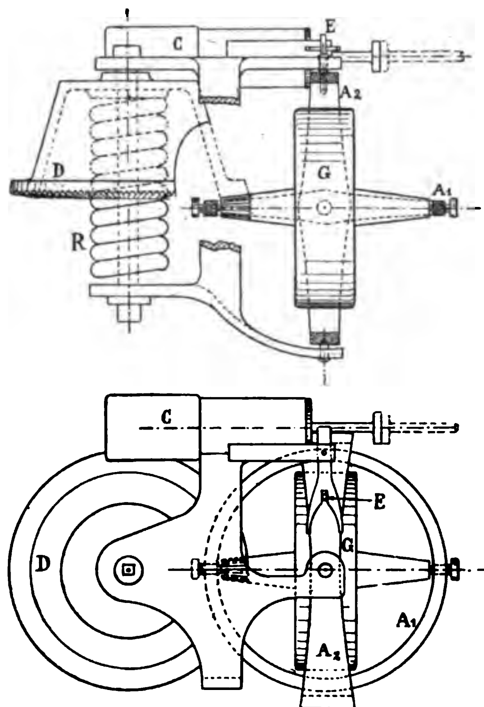


Figure 57.

gâchette est forcée de s'abaisser et permet à un puissant ressort R de se débander; il entraîne la cloche dentée D qui provoque la mise en rotation rapide d'un volant G (fig. 57).

Ce volant, qui constitue le gyrostat et pèse environ 750 grammes, peut recevoir ainsi une vitesse angulaire initiale de 2400 tours ; il est porté dans une monture à la cardan, de manière à ce que son axe puisse prendre toutes les orientations par rapport à la torpille.

Pendant la durée de la mise en rotation, cet axe est maintenu parallèle à l'axe longitudinal de la torpille ; il est libéré alors que, le gyrostat étant déjà en rotation, la torpille se trouve encore dans le tube, orientée au gré du pointeur.

L'appareil gyrostatique ne sert qu'à maintenir la torpille dans le plan de tir, le réglage de la trajectoire en profondeur est assuré par un autre appareil (*).

L'axe du gyrostat, une fois libéré, conservera sa direction dans l'espace, malgré les déviations accidentelles de la torpille ; si de telles déviations se produisent, il en résultera, par rapport au corps de la torpille, un déplacement relatif de l'équipage gyrostatique, constitué par le gyrostat lui-même et les deux anneaux A_1 et A_2 du cardan.

Si par exemple la torpille fait une embardée, le support de l'appareil gyrostatique se déplacera par rapport à celui-ci en entraînant l'anneau à axe vertical autour de ses tourillons ; cet anneau présente un ergot E auquel s'articule la tige d'un petit tiroir cylindrique, dont la boîte à tiroir est solidaire du support. Ce tiroir permet de faire communiquer le réservoir d'air comprimé avec l'une ou l'autre des extrémités d'un cylindre C dans lequel se déplace un piston qui commande un gouvernail de direction.

Suivant que l'embardée a lieu vers bâbord ou vers tribord, le tiroir donnera l'admission de l'air comprimé sur l'une ou l'autre face du piston et le gouvernail produira une embardée correctrice. Si la direction d'équilibre est dépassée, une ouverture des lumières en sens inverse ramènera la torpille dans le cap du but.

Remarque. L'appareil Obry doit être construit avec une rare précision, notamment les centres de gravité du tore et de l'anneau intérieur doivent coïncider rigoureusement avec la croisée des axes du cardan. Faute de réaliser cette condition, l'axe du tore, ou le vecteur du moment cinétique, ne conserverait pas son orientation horizontale, pendant la

---

(*) On trouvera des descriptions assez complètes des torpilles Whitehead dans *Engineering*, 1898, II, p. 89, NOALHAT : « Les Torpilles et les Mines sous-marines ». Paris (Berger-Levrault).

durée du mouvement, mais il se déplacerait d'un mouvement de précession lent autour de la verticale.

D'après le mode de fonctionnement que nous venons d'examiner, il résulterait de ce fait que la trajectoire de la torpille, au lieu d'être rectiligne, serait uniformément déviée.

Par exemple, avec les dimensions indiquées plus haut : $J = 12,2$ gr./g.cm², $\Omega = 250$ rad/sec, un couple de 1 gramme-centimètre donnerait lieu à une vitesse angulaire de précession $\omega = \frac{1}{12,2 \times 250} = 0,000328$.

La durée de la course utile d'une torpille étant d'environ 40″ on aurait une déviation totale de 0,01312 rad. ou 0,75 degré ; ce qui entraîne une erreur de 0,37° environ sur le pointage en direction.

Cette propriété a été utilisée dans certains cas pour faire parcourir aux torpilles une trajectoire courbe prédéterminée.

Une autre cause doit troubler plus ou moins le fonctionnement de l'appareil Obry ; en effet, par suite du mode de fonctionnement du régulateur d'immersion, la trajectoire de la torpille dans le plan de tir est également sinusoïdale ; pendant une inclinaison verticale de la trajectoire, l'anneau horizontal du gyrostat tendra à conserver son orientation, mais le frottement des tourillons peut l'entraîner plus ou moins et exercer sur lui un couple qui produira une précession du gyrostat dans le plan horizontal ; ce qui se traduira finalement par une embardée de la torpille. Ce mouvement parasite ayant un caractère alternatif, sera sans inconvénient.

En pratique, l'appareil Obry fournit d'excellents résultats, la trajectoire suivie par la torpille n'est pas rectiligne, mais plus ou moins sinusoïdale ou hélicoïdale. On estime que pendant la course utile de la torpille, soit environ 600 mètres, les écarts ne sont guère supérieurs à 0,60 m.

62. Torpille Howell. — La torpille automobile de Howell est également amenée à rester dans son plan de tir, grâce à une combinaison mécanique originale utilisant l'effet gyrostatique.

Un volant de 140 kilos environ, dont l'axe horizontal est disposé transversalement à la torpille, est animé au départ d'un mouvement de rotation très rapide (20000 tours par minute environ) ; par sa force vive, il emmagasine le travail nécessaire à la propulsion de la torpille par deux petites hélices.

Voici comment est assurée la stabilité de route: l'axe du volant — en même temps moteur et gyrostat — est horizontal et perpendiculaire à l'axe de la torpille, une force qui tendrait à faire dévier celle-ci et à l'écarter du plan de tir provoquerait une précession du gyrostat autour de l'axe de la torpille, c'est-à-dire amorcerait un mouvement de roulis de la torpille; sous l'effet de la bande produite, un pendule actionne un gouvernail vertical qui produit une embardée correctrice, et en même temps un couple de réaction gyrostatique ramène la torpille dans son assiette normale.

63. COMMANDE GYROSTATIQUE DES STABILISATEURS D'AÉROPLANES. — L'idée de recourir aux propriétés du gyrostat pour conserver un repère fixe en direction à bord d'un aéroplane doit être attribuée à Hiram Maxim. En 1889, ce remarquable ingénieur munit son grand aéroplane d'un pendule gyrostatique qui devait rester vertical lorsque l'appareil s'inclinerait, par ses déplacements relatifs, dans le plan longitudinal; il commandait la distribution d'un cylindre à vapeur dont le piston agissait, dans le sens convenable, sur deux gouvernails de profondeur. Une disposition analogue à celle des moteurs asservis ramenait automatiquement le tiroir distributeur à sa position moyenne pendant que les gouvernails entraient en action (*). Un accident malencontreux mit une fin prématurée aux expériences de Maxim.

Tout récemment, Regnard (*92*) inventa et construisit un appareil du même genre, représenté schématiquement par la figure 58.

Un gyrostat, dont le mouvement est entretenu par un petit électromoteur, est suspendu à la cardan, de manière à lui

(*) HIRAM S. MAXIM, *Le vol naturel et le vol artificiel*, **Paris 1909, p. 124.**

assurer une indépendance complète en direction par rapport à ses supports solidaires de la charpente de l'aéroplane.

L'axe du gyrostat est vertical, son équipage se termine inférieurement par un bouton convexe B ; si l'aéroplane s'incline, le bouton viendra appuyer sur l'un des contacts c_1 c'_1 c_2 c'_2, formés de deux lames élastiques conductrices superposées et pouvant fermer un circuit utilisable pour la commande des organes stabilisateurs de l'aéroplane.

Dans le modèle établi par Regnard, les mouvements des

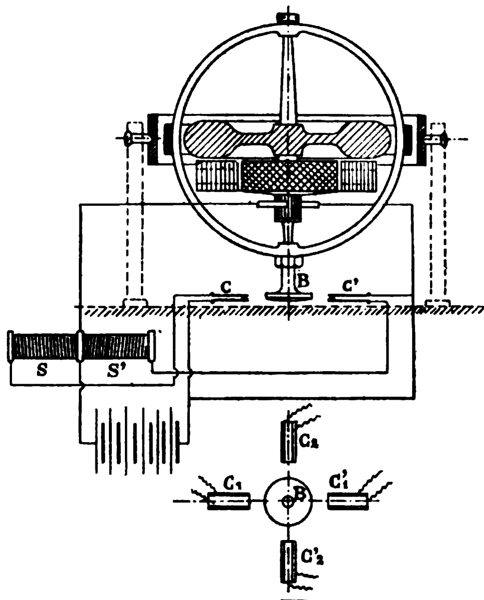


Figure 58.

organes de stabilisation latérale (ailerons latéraux) et des organes de stabilisation longitudinale (ailerons postérieurs) sont assurés par des câbles souples conduits par des pistons en fer doux plongés dans des solénoïdes, tels que SS'. Les circuits correspondant à c_1 et c'_1 agissent, par exemple, pour compenser les déviations en profondeur ; les contacts c_2 et c'_2 commandent les solénoïdes de la stabilisation transversale. Des dispositifs de réglage permettent de faire varier les limites d'intervention du gyrostat.

La remarque que nous avons faite à propos de la torpille

Whitehead est encore applicable ici. Supposons que le centre de gravité du gyrostat ne se trouve pas rigoureusement à la croisée des axes du cardan, nous savons que dans ces conditions, l'axe, au lieu de rester absolument vertical, décrira un cône de précession autour de la verticale vraie. « L'instinct artificiel de l'aéroplane », comme son inventeur l'a pittoresquement dénommé, pourrait donc être faussé; les erreurs à craindre sur la direction de la verticale sont cependant incomparablement moins grandes que les erreurs en direction que causerait un balourd de même importance sur un appareil Obry dont l'axe est horizontal. Les déviations seraient du même ordre de grandeur que celles que décèlent les longues inflexions du trace-roulis de Frahm (n° 38).

III. — Appareils stabilisateurs a action directe.

64. Dans les appareils de cette classe, le gyrostat, qui est toujours l'élément sensible aux désorientations, transmet intégralement les efforts de stabilisation. Cette définition conduit au processus de fonctionnement suivant:

Le système transmet toutes les perturbations de sa marche au gyrostat, qui participe ainsi à des précessions forcées; il en résulte des couples de réaction qui, à leur tour, provoquent des mouvements angulaires *dans un plan normal à celui de la perturbation*. Une source d'énergie appropriée modifie ces mouvements de précession de telle manière qu'ils produisent finalement les couples de réaction gyrostatique nécessaires pour combattre l'action perturbatrice.

L'étude des appareils fonctionnant suivant ce schéma sera facilitée par l'étude préalable des réactions d'un équipage gyrostatique sur un système à mouvement pendulaire dans différentes hypothèses de liaison ou de sollicitation.

Pour tenir compte de la remarque du n° 59, il convient de se limiter au cas où l'axe du gyrostat s'écarte peu de sa position moyenne perpendiculaire à l'axe d'oscillation du système; dès lors, nous pouvons nous borner à étudier les mouvements d'un pendule composé, comportant un gyrostat

monté comme l'indiquent les figures 59 à 64. Nous sommes amenés ainsi à énoncer les théorèmes suivants :

65. THÉORÈME I. — *Un gyrostat entraîné dans un mouvement pendulaire est sans effet sur le mouvement si la position de son axe est invariable par rapport au système.*

Considérons le pendule représenté par l'une des deux figures 59 et 61, un gyrostat est monté dans un anneau A qui peut normalement osciller autour de VV.

Nous supposons les vis V serrées de manière à empêcher le balancement de l'anneau A, l'axe du tore se trouve ainsi astreint à rester normal à l'axe de suspension O.

Nous admettrons de plus que l'axe de suspension soit invariable, c'est-à-dire, par exemple, que le couteau O soit engagé dans une rainure du support fixe S.

Soit P le poids du pendule complet, I son moment d'inertie par rapport à O et L la distance de son centre de gravité à l'axe de suspension ; pour les petites oscillations du pendule, nous aurons l'équation

$$-I\frac{d^2\varphi}{dt^2} - PL\varphi = o\,, \tag{89}$$

qui conduit aux résultats connus

$$\varphi = \Phi \sin\frac{2\pi}{T}t\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{PL}}\,. \tag{90}$$

Pendant ces oscillations, le gyrostat participant au mouvement du pendule développe à chaque instant un couple

$$C = J\Omega\frac{d\varphi}{dt}\,,$$

dont l'axe est dirigé dans l'alignement de VV. A cause de la rigidité des matériaux, et de l'invariabilité de l'axe du couteau, ce couple a pour seul effet de provoquer des efforts intérieurs au système et n'influence pas son mouvement.

Il en serait de même, quelle que soit la position de l'axe du gyrostat par rapport au système.

66. THÉORÈME II. — *Un gyrostat entraîné dans un mouvement pendulaire peut introduire un couple stabilisateur si*

son axe n'occupe pas une position invariable par rapport au système, c'est-à-dire si le gyrostat peut exécuter des mouvements de précession.

Supposons que dans le système représenté par la figure 59, les vis V ne soient pas serrées, ce qui permet au gyrostat monté dans l'anneau A de tourner, ou d'osciller, autour de VV.

Nous pourrons définir à chaque instant la situation du système par l'angle φ de l'ensemble pendulaire avec la verticale

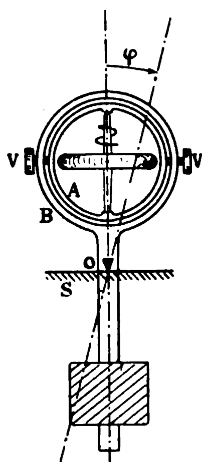


Figure 59.

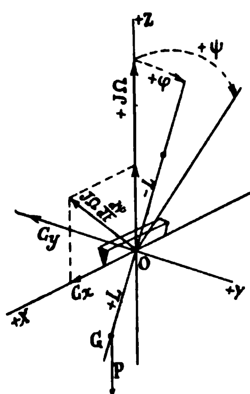


Figure 60.

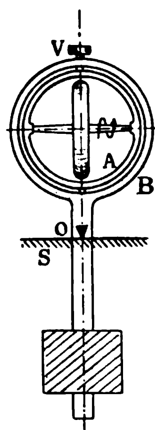


Figure 61.

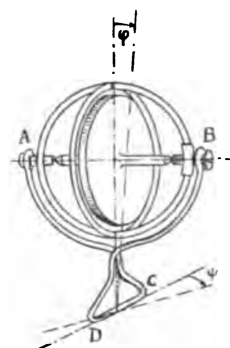


Figure 62.

et par l'angle ψ que fait l'axe du tore avec le plan d'oscillation du pendule, ou, en d'autres termes, l'angle que fait l'anneau A avec le cadre B. Nous admettrons que la rotation du tore a lieu dans le sens indiqué, et cette rotation sera considérée comme positive. La figure 60 résume ces conventions.

Le mouvement du système pendulaire autour de O, agira sur le gyrostat comme une précession forcée de vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt} \cos \psi$, et fera naître un couple $C_y = -J\Omega \frac{d\varphi}{dt} \cos \psi$ qui tendra à incliner l'anneau A par rapport au cadre B; la règle des trois doigts indique dans quel sens aura lieu le mouvement.

Ce mouvement angulaire, dont la vitesse est $\frac{d\psi}{dt}$ provoquera

à son tour un couple de réaction gyrostatique $J\Omega \frac{d\psi}{dt}$ dont le vecteur représentatif sera normal à la fois à $J\Omega$ et à $\frac{d\psi}{dt}$, il sera donc contenu dans le plan d'oscillation de l'anneau A. On pourra décomposer ce couple en deux autres

$$C_z = J\Omega \frac{d\psi}{dt} \sin \psi \qquad \text{et} \qquad C_x = J\Omega \frac{d\psi}{dt} \cos \psi ,$$

le premier sera neutralisé à chaque instant par la fixité de l'arête du couteau O, le second C_x interviendra pour modifier le mouvement du système pendulaire autour de son axe d'oscillation O.

Si l'on considère le dispositif représenté par la figure 61, où l'anneau A est libre d'osciller dans un plan horizontal, on constate sans peine que les conditions de sollicitation sont exactement les mêmes.

L'équation du mouvement du système pendulaire autour de O peut dès lors s'écrire (aussi bien pour la figure 61 que pour la figure 59) :

$$- I \frac{d^2\varphi}{dt^2} - PL \sin \varphi + J\Omega \frac{d\psi}{dt} \cos \psi = o .$$

Le signe attribué au terme PL sin φ suppose la quantité L comptée positivement de O vers G, le centre de gravité G étant en dessous de O. En d'autres termes, nous admettrons que L est une quantité positive ou négative, suivant que le système pendulaire considéré est normalement stable ou normalement instable.

L'angle ψ qui intervient dans l'équation précédente sera déterminé par la loi du mouvement de l'équipage gyrostatique (ensemble du gyrostat et de l'anneau A) autour de VV. Si nous désignons par A le moment d'inertie de l'équipage par rapport à VV, cette loi sera donnée par

$$- A \frac{d^2\psi}{dt^2} - J\Omega \frac{d\varphi}{dt} \cos \psi = o .$$

Cette dernière relation suppose implicitement que le centre de gravité de l'équipage se trouve sur l'axe VV.

En nous limitant aux petites oscillations pour φ, nous pouvons remplacer le sinus par l'arc dans les équations précédentes. Quant à l'angle ψ, nous ne savons pas *à priori* si les valeurs qu'il prendra seront faibles en même temps que celles de φ, mais il importe que cet angle ne prenne pas une valeur trop grande (voir n° 59, remarque *c*) ; nous ne devrons donc admettre que les solutions donnant pour ψ une valeur limitée. Dans ces conditions, nous pouvons sans grande erreur simplifier les calculs ultérieurs en remplaçant cos ψ par une valeur moyenne k (*) ; cela revient à considérer cos ψ comme un coefficient légèrement variable.

Les deux équations écrites plus haut deviennent dès lors:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + PL\varphi - k\, J\Omega \frac{d\psi}{dt} = o\,. \qquad (91)$$

$$A \frac{d^2\psi}{dt^2} + k\, J\Omega \frac{d\varphi}{dt} = o\,. \qquad (92)$$

Eliminons ψ entre ces deux équations, il vient

$$I \frac{d^3\varphi}{dt^3} + \left(\frac{k^2\, J^2\Omega^2}{A} + PL\right)\frac{d\varphi}{dt} = o\,.$$

En éliminant φ de la même manière, on obtient une équation en ψ identique, mais avec second membre.

Ce sont deux équations linéaires du troisième ordre qui conduisent aux intégrales générales

$$\varphi = K_1\, e^{x_1 t} + K_2\, e^{x_2 t} + K_3\, e^{x_3 t}\,,$$

$$\psi = K'_1\, e^{r_1 t} + K'_2\, e^{x_2 t} + K'_3\, e^{x_3 t} + K_4\,.$$

x_1 x_2 x_3 sont les racines de la même équation auxiliaire

$$x^3 + \left(\frac{k^2\, J^2\Omega^2}{AI} + \frac{PL}{A}\right)x = o\,. \qquad (93)$$

Si le coefficient de x est positif — nous verrons plus loin

(*) Dans les applications, on limitera généralement ψ à 45° environ de part et d'autre de sa position moyenne, de sorte que cos ψ restera compris entre 1 et 0,707; le coefficient k sera donc voisin de 0,85.

dans quels cas cela a lieu — cette équation admet une racine nulle et deux racines imaginaires pures

$$x_1 = o \quad x_2 = ai \quad x_3 = -ai \qquad a = \sqrt{\frac{k^2 J^2\Omega^2}{AI} + \frac{PL}{A}} .$$

Dans ces conditions, les deux intégrales générales peuvent s'écrire sous la forme trigonométrique

$$\varphi = B_1 + B_2 \sin (at + b)$$
$$\psi = D_1 + D_2 \sin (at + d) .$$

Les constantes B_1B_2b sont déterminées par les conditions initiales, les trois autres, D_1D_2d sont fonction des premières; les relations qui lient ces constantes s'obtiennent en introduisant la valeur de ψ dans l'équation (92), on trouve alors après intégration

$$\varphi = B_1 + \frac{A}{k\,J\Omega} D_2\, a^2 \sin \left(at + d + \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où l'on tire

$$D_2 = B_2 \frac{k\,J\Omega}{A}, \qquad d = b - \frac{\pi}{2} .$$

L'ensemble du système exécutera donc des oscillations pendulaires non amorties, tandis que l'équipage gyrostatique exécutera des oscillations de même période et déphasées de un quart de période en retard par rapport aux oscillations φ.

Ces conclusions ne s'appliquent que si le coefficient de x dans l'équation (93) est positif:

Dans le cas d'un pendule normalement stable $L > O$, il en sera toujours ainsi.

Dans le cas d'un pendule normalement instable $L < O$, il en sera de même, à condition que l'on ait :

$$\frac{k^2\, J^2\Omega^2}{A} > PL ;$$

c'est la condition qui permet au pendule instable d'exécuter des oscillations à période réelle.

Ce dernier résultat — qui démontre le théorème — est le plus intéressant à retenir; un pendule primitivement instable peut donc être rendu stable par la présence du gyrostat, à

condition que le moment cinétique de ce dernier dépasse une certaine limite. Ce fait est à rapprocher de la stabilité de la toupie dormante (n° 35).

Remarque. La stabilisation d'un pendule instable est donc possible si le mouvement de précession ψ peut se produire. Au lieu de supposer que l'équipage gyrostatique oscille autour de VV, on peut aussi bien imaginer que, dans le dis-

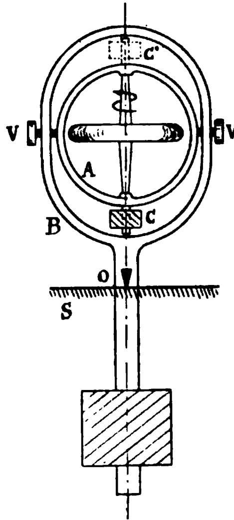


Figure 63.

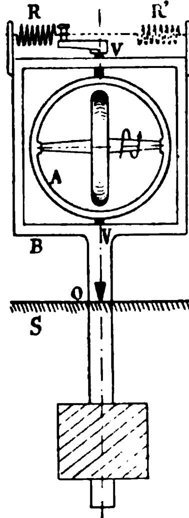


Figure 64.

positif de la figure 61, la vis V soit serrée à fond, de manière à empêcher tout balancement de l'anneau A, mais que le couteau O, au lieu d'être maintenu dans une rainure du support S, soit appliqué sur un plan parfaitement poli.

Dans ces conditions, le mouvement de l'axe du gyrostat se ramène à la superposition de deux oscillations φ et ψ analogues aux deux composantes des mouvements de nutation étudiés antérieurement ; l'état de sollicitation du système serait, d'ailleurs, très peu différent de celui d'une toupie.

Le jouet appelé pied équilibriste de Gervat (fig. 62) fournit une application directe de cette remarque. Un tore à axe horizontal est porté dans un support en fil de fer reposant sur la surface horizontale d'une table par un appendice

formé d'une simple arête CD perpendiculaire à l'axe AB du tore. Si la toupie ne tourne pas, l'appareil est instable; mais si elle est animée d'une rotation suffisamment grande, le système reste en équilibre. En réalité, le pied exécute des vibrations très rapides autour de CD, ce qui correspond au mouvement φ, en même temps que la ligne d'appui CD exécute des oscillations correspondant au mouvement ψ. Ces dernières vibrations sont très faibles; mais si on les empêche de se produire, par exemple en plaçant la base CD dans une fente de la table, la stabilité due à la rotation disparaît et l'appareil se renverse.

Cette propriété du gyrostat a été démontrée par lord Kelvin qui l'a admirablement mise en évidence par une série d'expériences faites au moyen de ses gyrostats de démonstration. Il a notamment attiré l'attention sur le fait extrêmement important qu'un gyrostat stable, en ce sens que son orientation reste sensiblement constante, peut perdre sa stabilité lorsqu'on lui impose de nouvelles liaisons (*).

67. THÉORÈME III. — *Un gyrostat entraîné dans un mouvement pendulaire peut exercer un effet stabilisateur, si l'équipage gyrostatique, libre d'exécuter des mouvements de précession, constitue lui-même un pendule composé.*

Suivant que le système pendulaire est normalement stable ou instable, l'équipage gyrostatique devra être également stable ou instable.

Considérons le dispositif représenté par la figure 63, l'anneau A, établi comme dans le cas de la figure 59, est complété par un balourd placé en C ou en C', en dessous ou au-dessus de l'axe VV, de manière à rendre l'équipage gyrostatique stable ou instable. Dans le dispositif de la figure 64, qui correspond à celui de la figure 61, on peut imaginer un ressort agissant à l'extrémité d'une manivelle calée sur l'axe VV; suivant que le ressort est établi en R ou en R', la position moyenne de l'équipage est stable ou instable.

Dans l'un et l'autre cas, l'équipage gyrostatique est bien

(*) THOMSON et TAIT (*36*), t. I, p. 397.

sollicité comme un pendule composé, par un couple proportionnel à l'angle ψ; nous le représentons par $c\psi$, le coefficient c étant une quantité positive ou négative, suivant que l'équipage est stable ou instable.

L'équation d'équilibre de l'équipage s'obtiendra en ajoutant le terme $c\psi$ à l'équation (92) du théorème précédent.

$$A \frac{d^2\psi}{dt^2} + c\psi + k\,J\Omega \frac{d\varphi}{dt} = o\,. \tag{94}$$

Quant à l'équation du mouvement de l'ensemble du système pendulaire, elle reste identique à l'équation (91)

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + PL\varphi - kJ\,\Omega \frac{d\psi}{dt} = o\,, \tag{95}$$

la quantité L est, comme antérieurement, positive ou négative, suivant que le pendule est normalement stable ou instable.

Les équations (94) et (95) sont les équations des petites oscillations correspondant à deux mouvements pendulaires entretenus, le couple d'entretien de chacun de ces mouvements étant fonction de l'autre mouvement.

Eliminons ψ entre ces deux équations, en dérivant une fois la première et deux fois la seconde, il vient:

$$\frac{d^4\varphi}{dt^4} + \left(\frac{k^2\,J^2\Omega^2}{AI} + \frac{PL}{I} + \frac{c}{A}\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{PLc}{AI}\,\varphi = o\,. \tag{96}$$

En éliminant φ de la même manière entre les mêmes équations, on obtiendrait une équation identique à l'équation (96), mais en ψ. La même intégrale générale sera valable pour ces deux équations, aux constantes près, et l'on pourra écrire

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= K_1\,e^{x_1} + K_2\,e^{x_2} + K_3\,e^{x_3} + K_4\,e^{x_4}\,, \\ \psi &= K'_1\,e^{x_1} + K'_2\,e^{x_2} + K'_3\,e^{x_3} + K'_4\,e^{x_4}\,. \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ sont les racines de la même équation auxiliaire

$$x^4 + \left(\frac{k^2\,J^2\Omega^2}{AI} + \frac{PL}{I} + \frac{c}{A}\right)x^2 + \frac{PLc}{AI} = o\,, \tag{98}$$

équation bicarrée qui conduit à

$$x = \pm \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}},$$

avec

$$p = \frac{k^2 J^2 \Omega^2}{AI} + \frac{PL}{I} + \frac{c}{A} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{PLc}{AI}.$$

Pour que les mouvements φ et ψ soient des mouvements limités n'entraînant pas le chavirement du système, il importe que les expressions de φ et de ψ ne renferment que des fonctions décroissantes; il faut pour cela que l'équation caractéristique (98) n'admette aucune racine réelle positive ni aucune racine complexe à partie réelle positive.

Discussion:

Si L *et* c *sont de signes contraires:* q sera toujours négatif, p sera positif ou négatif, généralement positif à cause de la valeur élevée de Ω; en tout cas, on aura deux racines imaginaires pures et deux racines réelles, dont une positive. Le mouvement du système se ramènera à la superposition d'un mouvement pendulaire non amorti et de deux mouvements apériodiques, l'un tendant rapidement vers zéro, tandis que l'autre, indéfiniment croissant, correspond à un chavirement.

Si L *et* c *sont du même signe:* s'ils sont positifs, p et q seront positifs et l'équation admettra quatre racines purement imaginaires. Si L et c sont simultanément négatifs, q sera toujours positif et p le sera également, si $J\Omega$ dépasse une certaine valeur définie par:

$$k^2 J^2 \Omega^2 > PLA + cI,$$

dans ce cas, l'équation admettra également quatre racines imaginaires pures; si la dernière inégalité n'était pas satisfaite, il pourrait y avoir quatre racines réelles, dont une au moins positive.

Le cas intéressant est donc celui où les quatre racines sont des imaginaires pures, désignons-les par

$$+a_1 i \qquad -a_1 i \qquad +a_2 i \qquad -a_2 i\ .$$

On sait que dans ces conditions les intégrales (97) peuvent

être mises sous forme trigonométrique, la première devient alors

$$\varphi = B_1 \sin(a_1 t + b_1) + B_2 \sin(a_2 t + b_2), \qquad (97')$$

elle exprime que le mouvement du système pendulaire se ramène à la superposition de deux mouvements périodiques non amortis ayant pour périodes

$$t_1 = \frac{2\pi}{a_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}}, \qquad t_2 = \frac{2\pi}{a_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}}.$$

Ces deux périodes sont d'autant plus différentes que $\frac{p^2}{4}$ sera plus grand comparativement à q, c'est-à-dire plus $J\Omega$ sera important.

Le mouvement de l'équipage gyrostatique obéira à une loi analogue

$$\psi = D_1 \sin(a_1 t + d_1) + D_2 \sin(a_2 t + d_2).$$

Les quatre constantes sont liées à celles qui interviennent dans l'équation du mouvement φ; on obtient les relations entre ces constantes en introduisant les valeurs de φ et de $\frac{d^2\varphi}{dt}$ tirées de (97') dans l'équation (95), on trouve alors après intégration

$$\psi = B_1 \left(\frac{PL - Ia_1^2}{a_1 k J\Omega}\right) \sin\left(a_1 t + b_1 - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ B_2 \left(\frac{PL - Ia_2^2}{a_2 k J\Omega}\right) \sin\left(a_2 t + b_2 - \frac{\pi}{2}\right) + D_3,$$

la constante d'intégration D_3 doit être égale à zéro pour que la valeur de ψ puisse satisfaire l'équation (94).

Cette dernière expression indique que la loi du mouvement de l'équipage gyrostatique consiste en la superposition de deux balancements de mêmes périodes que les oscillations φ, mais d'amplitudes différentes et déphasées de $\frac{\pi}{2}$, ou un quart de période, en retard par rapport à celles-ci.

Ces conclusions ne s'appliquent que si les quatre racines de l'équation auxiliaire sont imaginaires; nous avons vu plus haut que cela aura toujours lieu lorsque L et c sont positifs: système stable et équipage stable; et que cela pourra avoir lieu si L et c sont négatifs: système instable et équipage instable, à condition que le moment cinétique du gyrostat soit suffisant. Le théorème se trouve donc démontré.

COROLLAIRE. — *L'effet stabilisateur d'un équipage gyrostatique sollicité comme un pendule ne serait effectif qu'en l'absence de frottement.* — En effet, dans la démonstration du théorème précédent on n'a pas tenu compte des frottements et sa conclusion est purement théorique.

Les oscillations du pendule stable que la théorie donne comme non amorties, sont peu à peu réduites en amplitude par les frottements. De même, les mouvements périodiques non amortis que la théorie annonce pour le pendule normalement instable, seront altérés par les résistances passives et leurs amplitudes iront en croissant peu à peu.

Le dispositif précédent ne serait donc pas suffisant pour stabiliser un pendule instable d'une manière permanente.

Pour le démontrer analytiquement, multiplions l'équation (94) par $\frac{d\psi}{dt}$ et l'équation (95) par $\frac{d\varphi}{dt}$, en les additionnant il vient

$$\frac{1}{2}\mathrm{I}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{A}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \mathrm{PL}\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + c\psi\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = o \ . \quad (99)$$

Cette équation exprime que la variation par unité de temps de l'énergie tant potentielle que cinétique de l'ensemble du système et du gyrostat est nulle. C'est-à-dire qu'il y a entre le système et l'équipage gyrostatique un continuel échange d'énergie sans autre résultat.

68. THÉORÈME IV. — *Un gyrostat entraîné dans un mouvement pendulaire peut exercer un effet à la fois stabilisateur et amortisseur, s'il est libre d'exécuter des mouvements de précession et si ces mouvements de précession sont amortis ou excités par une source d'énergie extérieure.*

Suivant que le système est normalement stable ou instable, les oscillations de précession devront être amorties ou excitées.

Reprenons le système considéré pour démontrer le théorème précédent et complétons l'état de sollicitation de l'équipage gyrostatique par l'introduction d'un couple proportionnel à sa vitesse angulaire d'oscillation, nous le représenterons par $c'' \frac{d\varphi}{dt}$, c'' étant une quantité positive ou négative, suivant que le couple agit en sens inverse de la vitesse (frein ou amortisseur) ou dans le sens même de la vitesse (excitateur).

Imaginons de même que le mouvement du système pendulaire soit altéré par un couple dû aux résistances passives $c' \frac{d\psi}{dt}$, c' étant une quantité positive.

Les équations (95) et (94) du cas précédent doivent être complétées par ces deux termes et deviennent

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + c' \frac{d\varphi}{dt} + PL\varphi - k\, J\Omega \frac{d\varphi}{dt} = o . \qquad (100)$$

$$A \frac{d^2\psi}{dt^2} + c'' \frac{d\psi}{dt} + c\psi + k\, J\Omega \frac{d\varphi}{dt} = o . \qquad (101)$$

Nous ne rappelons pas la signification de L et de c, qui peuvent être, suivant les cas, des quantités positives ou négatives.

L'élimination de ψ entre les équations (100) et (101) conduit à :

$$\frac{d^4\varphi}{dt^4} + \frac{d^3\varphi}{dt^3}\left(\frac{c'}{I} + \frac{c''}{A}\right) + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\frac{k^2\, J^2\Omega^2}{AI} + \frac{c}{A} + \frac{PL}{I} + \frac{c'c''}{AI}\right)$$

$$+ \frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{c''PL + c'c}{AI}\right) + \frac{cPL}{AI}\varphi = o \qquad (102)$$

L'élimination de φ conduit à une équation identique en ψ. Les mouvements φ et ψ sont dès lors définis par des équa-

tions différentielles linéaires complètes du quatrième ordre admettant la même équation auxiliaire de la forme

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = o \,. \qquad (103)$$

$$p = \left(\frac{c'}{I} + \frac{c''}{A}\right), \qquad q = \left(\frac{k^2\, J^2\Omega^2}{AI} + \frac{c}{A} + \frac{PL}{I} + \frac{c'c''}{AI}\right),$$

$$r = \frac{PL\, c'' + c\, c'}{AI}, \qquad s = \frac{PL\, c}{AI} \,.$$

Si cette dernière équation admet des racines réelles positives, les intégrales générales des équations (102) (dont une seule a été écrite) comprendront des termes de la forme Be^{xt} indéfiniment croissants avec le temps, ce qui correspond à un chavirement apériodique ; de même si l'équation (103) admettait des racines complexes à partie réelle positive, on aurait un mouvement périodique d'amplitude indéfiniment croissante.

Il faut donc disposer des éléments constructifs de manière à ce que l'équation (103) n'admette ni racine positive, ni racine complexe à partie réelle positive. Cela aura lieu si tous les coefficients de l'équation sont positifs et les conditions à remplir pour atteindre ce résultat s'obtiennent facilement.

1° *Système stable:* L *positif,* pour que le dernier terme de l'équation (103) soit positif, il faudra tout d'abord que c soit également positif, c'est-à-dire que l'équipage gyrostatique devra être stable comme le système lui-même (conclusion déjà fournie par le théorème III). Les autres coefficients seront positifs si c' et c'' sont simultanément positifs, c' est positif dans le cas de résistances passives, c'' devra être positif, c'est-à-dire que *les mouvements de l'équipage gyrostatique devront être amortis* par un organe tel qu'un frein.

2° *Système instable:* L *négatif,* il faudra que c soit négatif pour rendre positif le dernier terme de l'équation (103), le gyrostat devra donc être instable en même temps que le système lui-même (conclusion déjà exprimée par le théo-

rème III). Pour rendre les autres coefficients de (103) positifs, L et c étant négatifs, il faudra que c' et c'' soient de signes contraires, et comme c' est positif, c'' devra être négatif, ce qui signifie que *les mouvements de l'équipage gyrostatique devront être accélérés* ou excités par un organe approprié.

Il faudra de plus satisfaire l'inégalité:

$$\frac{k^2 \, J^2\Omega^2}{AI} > \frac{c}{A} + \frac{PL}{I} + \frac{c'c''}{AI} \;;$$

cette condition, qui implique une limite inférieure pour le moment cinétique, correspond aux conditions analogues trouvées au cours des démonstrations des théorèmes II et III.

Il faut enfin satisfaire aux conditions :

$$\frac{c'}{I} \geqslant \frac{c''}{A} \qquad \text{et} \qquad PLc'' \geqslant c'c$$

qui peuvent s'écrire

$$\frac{I}{A} \leqslant \frac{c'}{c''} \leqslant \frac{PL}{c},$$

cela implique

$$\frac{c}{A} \leqslant \frac{PL}{I} \;;$$

cette dernière inégalité définit une limite inférieure pour la période d'oscillation propre $t = 2\pi\sqrt{\frac{A}{c}}$ de l'équipage gyrostatique.

On peut donc dans les deux cas du système stable et du système instable choisir les éléments constructifs de manière que l'équation (103) n'admette ni racine réelle positive, ni racine complexe à partie réelle positive.

L'étude détaillée des racines, qui serait extrêmement laborieuse, permettrait dans chaque cas de se faire une idée complète du mouvement. Nous pouvons nous borner à dire, d'une manière générale, et cela démontre le théorème, que les racines étant réelles négatives, complexes à partie réelle négative, ou à la fois de ces deux espèces, le

mouvement du système, écarté de sa position d'équilibre, pourra se ramener à des mouvements apériodiques décroissants, à des mouvements périodiques décroissants ou à une combinaison de ces deux genres de mouvements.

69. Corollaire. — *Le travail de stabilisation et d'amortissement dans le cas de la solution précédente est fourni intégralement par les couples* $c' \frac{d\varphi}{dt}$ et $c'' \frac{d\psi}{dt}$.

Pour évaluer le travail fourni ou absorbé par ces deux couples, reprenons les équations (100) et (101), multiplions la première par $\frac{d\varphi}{dt}$, la seconde par $\frac{d\psi}{dt}$, en les additionnant, il vient :

$$\left[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathrm{I}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \mathrm{A}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] + \mathrm{PL}\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + c\psi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$$
$$= - c'\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - c''\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2. \qquad (104)$$

Le premier membre de cette égalité exprime la variation par unité de temps de l'énergie, tant potentielle que cinétique, du système et du gyrostat ; les deux termes du second membre représentent les quantités de travail absorbées par les couples $c' \frac{d\varphi}{dt}$ et $c'' \frac{d\psi}{dt}$.

Ce résultat resterait entier si les couples proportionnels aux vitesses angulaires étaient remplacés par des couples de même sens, mais de grandeur constante, ou variable suivant une loi différente.

L'ensemble des deux termes du second membre représente, en somme, le taux suivant lequel l'énergie du système se dissipe ; ils correspondent à des *forces dissipatrices* ; au contraire, les couples gyrostatiques : $k\mathrm{J}\Omega \frac{d\varphi}{dt}$, qui entretient la précession du gyrostat, et $k\mathrm{J}\Omega \frac{d\psi}{dt}$, dont l'influence est si grande sur le mouvement du système, ont disparu de

l'équation ; ils donnent lieu à de continuels échanges d'énergie sans en dépenser aucune quantité, ils correspondent à des *forces conservatrices* (*).

APPLICATIONS :

70. AMORTISSEUR DE ROULIS DU Dr OTTO SCHLICK. — Un navire soumis au roulis se trouve dans les conditions d'un pendule ordinaire normalement stable, dont le mouvement oscillatoire serait entretenu par des couples pério-

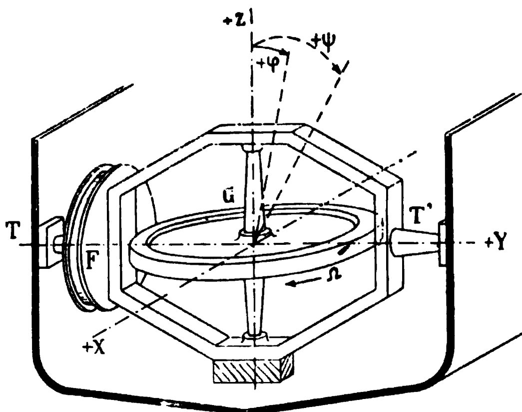


Figure 65.

diques ; dans l'espèce, les couples transversaux dus au passage de la houle sous le navire.

L'appareil du Dr Schlick (*70*) consiste en un gyrostat G (fig. 65), dont la position moyenne de l'axe est verticale et qui peut osciller dans le plan longitudinal du navire autour des tourillons T et T'. Le centre de gravité de l'équipage oscillant est établi en dessous de TT' à une distance convenablement réglée.

Lorsque le navire roule, le couple de réaction gyrosta-

(*) Les forces conservatrices d'énergie dépendent d'un potentiel, leur intervention n'est accompagnée d'aucune dissipation d'énergie. On voit que les réactions d'inertie dues à l'effet gyrostatique jouissent de la même propriété. C'est ce qui justifie l'expression « gyroscopic term » choisie par lord Kelvin pour désigner une propriété plus générale que l'effet gyrostatique [THOMSON et TAIT (*36*), t. 1er, p. 393].

tique qui se développe provoque l'oscillation de l'équipage, reproduisant exactement les conditions envisagées au n° 67 (théorème III).

Pour que l'appareil soit réellement amortisseur, il faut le compléter, comme l'indique le théorème IV, par un frein F exerçant autour de l'axe TT′ un couple qui amortit le balancement longitudinal. Enfin, ce mouvement de balancement est limité à 45° environ de part et d'autre de la position moyenne, par des buttoirs; ces derniers ne sont pas représentés sur la figure 65.

Le mouvement du navire muni de l'amortisseur de roulis peut s'étudier au moyen d'équations qui ne diffèrent guère des équations (100) et (101) du n° 68, mais sans écrire aucune équation on peut se représenter le fonctionnement du système, d'une manière assez complète, par la démonstration élémentaire que voici :

Représentons par une courbe à allure sinusoïdale I, les inclinaisons φ du navire en fonction du temps, les vitesses angulaires correspondantes seront représentées par la sinusoïde II (fig. 66).

La courbe II fournit directement, par un changement d'échelle et de signe, une courbe III représentant le couple de réaction gyrostatique $C_y = -kJ\Omega\frac{d\varphi}{dt}$, qui agit dans le plan longitudinal du navire et entretient les oscillations de l'équipage (*).

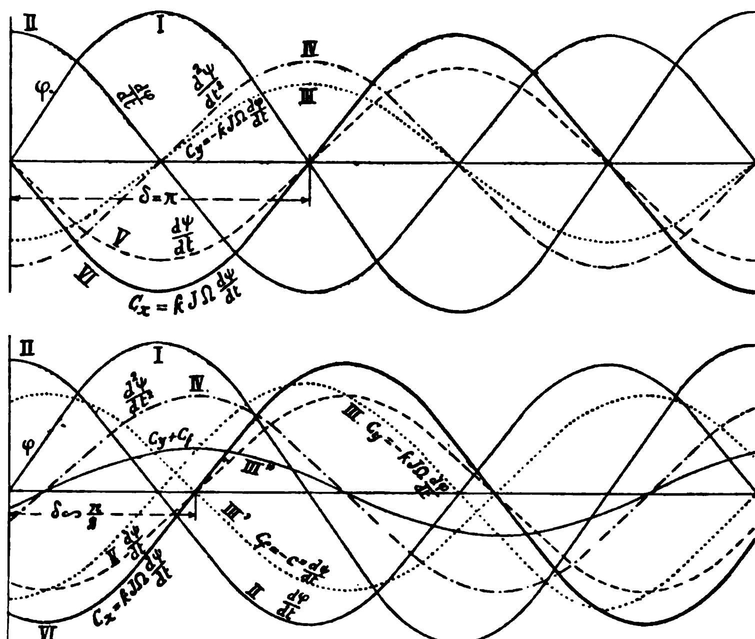
Représentons également par les sinusoïdes IV et V les accélérations $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ et les vitesses angulaires $\frac{d\psi}{dt}$ de l'équipage ; en supposant que celui-ci oscille librement autour de TT′, la courbe IV se déduira de la courbe III par un simple changement d'échelle.

Enfin, nous pouvons former une courbe VI, identique à l'échelle près à la courbe V, qui représentera en fonction

(*) Nous n'insistons plus sur l'origine des différents couples C_x, C_y, ni sur la signification du coefficient k, ces points ont été exposés en détail au n° 66.

du temps les valeurs du couple de réaction gyrostatique $C_x = kJ\Omega \frac{d\psi}{dt}$ agissant transversalement sur le navire.

En considérant simultanément les courbes I et VI, on voit que le couple C_x est déphasé de π en retard par rapport



Figures 66 et 67.

au mouvement φ; il sera alternativement amortisseur et excitateur (voir n° 58, note) ; le gyrostat participera à de continuels échanges d'énergie, mais ne réduira pas le roulis.

Pour que le couple C_x exerce réellement un effet amortisseur et absorbe du travail aux dépens de l'énergie du roulis, il faudrait que la courbe VI représentant C_x fût reculée vers la gauche, de manière à être déphasée par rapport à I d'une fraction de période δ voisine de $\frac{\pi}{2}$. Ce résultat s'obtient en utilisant un frein qui amortit les oscillations ψ de l'équipage.

En effet, considérons la figure 67 qui contient les mêmes

courbes I, II, III que la figure 66 et en plus une courbe III′ représentant un couple résistant $C_f = - c' \frac{d\psi}{dt}$ (*) ; la courbe IV représentant $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ se déduit ici de la courbe III″, somme géométrique des deux sinusoïdes III et III′ correspondant respectivement à C_u et à C_f.

On se trouve maintenant conduit à une courbe VI convenablement déphasée en retard par rapport à I, ce qui prouve que le couple C_x sera effectivement amortisseur.

On remarquera que le travail d'amortissement, fonction de sin δ (voir n° 58, note), dépend essentiellement du frein ; si au lieu d'un frein on avait un accélérateur fournissant un couple $C_a = + c' \frac{d\psi}{dt}$, le roulis serait au contraire continuellement excité.

71. *Equations du roulis.* — *Etude quantitative du système.* — Supposons un bateau incliné transversalement, la poussée hydrostatique le fera retourner à sa position droite, l'inertie lui fera dépasser cette position et ainsi s'amorcera une série d'oscillations qui constituent le roulis libre du navire en eau calme ; l'équation différentielle de ce mouvement est :

$$- I \frac{d^2\varphi}{dt^2} - P (r - a) \sin \varphi - c' \frac{d\varphi}{dt} = o ,$$

équation analogue à celle du mouvement d'un pendule composé : I est le moment d'inertie du navire autour de son axe longitudinal, P son poids, $(r - a)$ la hauteur métacentrique (qui correspond à la longueur du pendule composé), $P (r - a) \sin \varphi$ est le moment de redressement dû à la poussée hydrostatique et $- c' \frac{d\varphi}{dt}$ le moment résistant que le

(*) Un tel couple, proportionnel à la vitesse angulaire $\frac{d\psi}{dt}$, pourrait être produit par un frein électromagnétique.

frottement de l'eau oppose au roulis et que l'on suppose proportionnel à la vitesse angulaire.

Si le navire est muni d'un appareil Schlick, il y a lieu de faire intervenir le couple déjà défini plus haut $C_x = kJ\Omega \frac{d\psi}{dt}$ dans l'équation précédente qui devient

$$- I \frac{d^2\varphi}{dt^2} - P(r-a) \sin \varphi - c' \frac{d\varphi}{dt} + k\, J\Omega \frac{d\psi}{dt} = o\,.$$

On déterminera ψ au moyen d'une seconde équation différentielle relative au mouvement de l'équipage gyrostatique

$$- A \frac{d^2\psi}{dt^2} - pl \sin \psi - c'' \frac{d\psi}{dt} - k\, J\Omega \frac{d\varphi}{dt} = o\,,$$

A est le moment d'inertie de l'équipage gyrostatique par rapport à TT', p son poids et l la distance de son centre de gravité en dessous de TT', — $c'' \frac{d\psi}{dt}$ est le moment résistant du frein.

L'intégration de ces deux équations, qui ne diffèrent pas des équations (101) et (103) du n° 68, conduirait à une expression complète de la loi du mouvement, tant pour le navire que pour le gyrostat.

Ce calcul a été fait d'une manière très complète par M. Föppl (*73*) dans le cas de petites oscillations φ et ψ et en faisant abstraction de la résistance de l'eau, c'est-à-dire en supposant $c' = o$; nous ne reproduirons pas ces calculs, qui démontrent clairement l'efficacité du système qui doit amener une extinction rapide du roulis (*).

(*) Les équations utilisées sont :

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + P(r-a)\varphi - J\Omega \frac{d\psi}{dt} = o\,.$$

$$A \frac{d^2\psi}{dt^2} + pl\psi - c'' \frac{d\psi}{dt} - J\Omega \frac{d\varphi}{dt} = o\,.$$

En procédant pour l'intégration comme aux nos 67 et 68, M. Föppl est amené à résoudre une équation caractéristique du 4e degré qui n'admet que des racines complexes à partie réelle négative. Le navire prend un roulis qui se ramène à deux mouvements périodiques amortis, les oscillations de l'équipage suivent une loi analogue.

Cette solution, qui fournit des indications quantitatives sur les dimensions de l'appareil, résout le problème dans le cas du navire incliné, puis abandonné à son inertie dans un liquide non résistant, c'est-à-dire en somme dans un cas assez particulier.

Nous suivrons une méthode plus élémentaire qui aura au moins l'avantage de considérer le système dans des conditions moins éloignées de celles où il fonctionnera en pratique.

Nous supposerons le navire animé d'un mouvement de roulis permanent, entretenu par une houle régulière, et tiendrons compte du frottement de l'eau sur la carène en le considérant comme un couple $-c'\frac{d\varphi}{dt}$; le problème ainsi posé serait très compliqué à résoudre, et il faut introduire quelques hypothèses simplificatives.

La houle sera supposée sinusoïdale, ses inclinaisons successives en un même point seront exprimées par $\theta = \Theta \sin \varepsilon t$; si φ représente l'angle du roulis absolu (angle de la mâture avec la verticale), le moment de redressement dû à la poussée hydrostatique sera

$$\mathrm{P}\,(r-a)\sin(\theta-\varphi).$$

Si les angles de la houle et du roulis sont supposés assez faibles pour pouvoir confondre les arcs et les sinus, le terme précédent pourra être remplacé par deux autres $\mathrm{P}\,(r-a)\,\theta$ $-\mathrm{P}\,(r-a)\,\varphi$.

Nous pouvons dès lors écrire les équations définitives des mouvements du navire et de l'équipage gyrostatique :

$$\mathrm{I}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mathrm{P}\,(r-a)\,\varphi - \mathrm{P}\,(r-a)\,\theta + c'\frac{d\varphi}{dt} - k\mathrm{J}\Omega\frac{d\psi}{dt} = o. \quad (105)$$

$$\mathrm{A}\frac{d^2\psi}{dt^2} + pl\psi + c''\frac{d\psi}{dt} + k\,\mathrm{J}\Omega\frac{d\varphi}{dt} = o. \quad (106)$$

L'inclinaison θ de la houle peut être exprimée par $\theta = \Theta \sin \varepsilon t$; d'autre part, si l'on incline le navire et si on le laisse revenir à sa position droite en eau calme, il exécu-

tera, comme un pendule composé, des oscillations dont la période est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{P\,(r-a)}},$$

c'est la période propre du roulis du navire, elle correspond à une célérité

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{P\,(r-a)}{I}}. \qquad (107)$$

Lorsque α est grand par rapport à ε, le régime qui s'établira sur houle — le roulis forcé — prendra la période de la houle, c'est le cas d'une petite embarcation sur une grande houle.

Si au contraire α est petit comparativement à ε, ce qui est le cas d'un grand navire sur une petite houle, le navire roule avec sa période propre.

Enfin, si α et ε sont de grandeurs comparables, le roulis n'est pas d'amplitude régulière ; il passe par des séries de maxima et de minima qui se succèdent périodiquement ; mais si en particulier $\alpha = \varepsilon$, le navire et la houle sont synchrones ; à chaque ondulation, le navire reçoit une impulsion angulaire et le roulis augmenterait indéfiniment jusqu'au chavirement, si les résistances de l'eau n'intervenaient pour limiter ces mouvements.

C'est dans le cas du synchronisme que le roulis est le plus fort, c'est dans ce cas que nous nous placerons pour calculer le dispositif gyrostatique destiné à le réduire.

Considérons donc un navire muni de l'appareil Schlick sur une houle qui lui est synchrone, nous supposons les mouvements arrivés à un état de régime, tous peuvent être supposés sinusoïdaux et de même période, ou de célérité α (*).

(*) Le synchronisme entre le navire et la houle constitue le cas défavorable que nous considérons à dessein ; quant au synchronisme entre le roulis du navire et les oscillations de l'équipage gyrostatique, ce n'est pas, comme on pourrait le croire au premier abord, une hypothèse artificielle ; elle s'impose au contraire par des considérations pratiques.

Appelons Θ l'inclinaison maximum de la houle, Φ l'amplitude du roulis et Ψ l'amplitude des excursions de l'équipage gyrostatique.

Nous désignerons par α la célérité de tous les mouvements pendulaires considérés, nous supposerons l'inclinaison du navire déphasée de β en retard par rapport à celle de la houle et l'inclinaison de l'équipage déphasée de $(\gamma - \beta)$ en retard par rapport à celle du navire, soit de γ en retard par rapport à la houle.

Les différentes fonctions qui interviennent dans les équations (105) et (106) peuvent dès lors s'écrire :

$$\theta = \Theta \sin \alpha t, \qquad \varphi = \Phi \sin(\alpha t - \beta) \qquad \psi = \Psi \sin(\alpha t - \gamma)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \alpha\Phi \sin\left(\alpha t - \beta + \frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{d\psi}{dt} = \alpha\Psi \sin\left(\alpha t - \gamma + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \alpha^2\Phi \sin(\alpha t - \beta + \pi) \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = \alpha^2\Psi \sin(\alpha t - \gamma + \pi)$$

En effet, le gyrostat constitue un pendule composé oscillant autour de TT′, la période propre de ses oscillations libres étant

$$2\pi\sqrt{\frac{A}{pl}}.$$

Les oscillations de ce pendule composé sont entretenues par le couple de réaction gyrostatique $-kJ\Omega \frac{d\varphi}{dt}$ qui a la même périodicité que le roulis. Or, on sait que l'amplitude des oscillations d'un mouvement pendulaire entretenu dépend essentiellement du rapport qui existe entre la période propre du pendule et celle du couple d'entretien ; elle est maximum lorsque ces deux périodes sont égales.

Si donc il y a synchronisme entre le navire et l'équipage gyrostatique, les excursions ψ de ce dernier auront une amplitude maximum ; cela entraîne une valeur maximum pour la vitesse $\frac{d\psi}{dt}$ et par suite pour le couple $kJ\Omega \frac{d\psi}{dt}$ qui intervient dans le travail d'amortissement du roulis.

La condition de synchronisme, qui entraîne une condition de maximum d'efficacité se traduit par

$$\frac{A}{pl} = \frac{I}{P(r-a)},$$

elle se réalise facilement en pratique par un choix convenable de l.

et les deux équations deviennent :

$$I\alpha^2\Phi\sin(\alpha t-\gamma+\pi)+P(r-a)\Phi\sin(\alpha t-\beta)-P(r-a)\Theta\sin\alpha t$$

$$+c'\alpha\Phi\sin\left(\alpha t-\beta+\frac{\pi}{2}\right)-kJ\Omega\alpha\Psi\sin\left(\alpha t-\gamma+\frac{\pi}{2}\right)=o\ . \quad (108)$$

$$A\alpha^2\Psi\sin(\alpha t-\gamma+\pi)+pl\Psi\sin(\alpha t-\gamma)+c''\alpha\Psi\sin\left(\alpha t-\gamma+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+kJ\Omega\alpha\Phi\sin\left(\alpha t-\beta+\frac{\pi}{2}\right)=o\ . \quad (109)$$

Les premiers membres de ces deux équations sont des

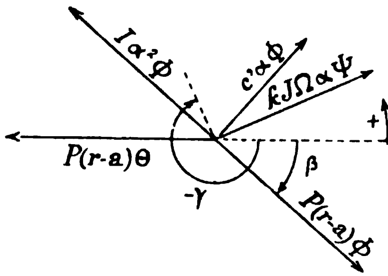


Figure 68.

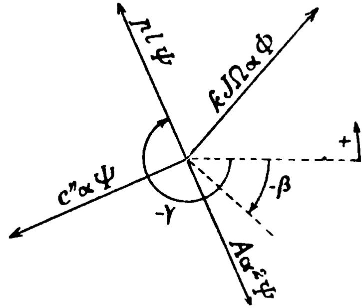


Figure 69.

sommes de fonctions sinusoïdales de même période que l'on peut représenter graphiquement par des vecteurs (fig. 68 et 69), et l'on en trouve facilement une solution particulière.

Commençons par utiliser la méthode pour résoudre une question préliminaire ; supposons que le gyrostat ne soit pas en action, $\Psi=\Omega=o$, l'équation (108), qui est alors seule à considérer, est satisfaite en y faisant

$$\beta=\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad P(r-a)\Theta=c'\alpha\Phi\ .$$

Cela se lit immédiatement sur la figure 68 et se traduit comme suit en langage ordinaire :

Les inclinaisons de roulis d'un navire sur houle synchrone sont en quadrature avec les inclinaisons de la houle, le navire est à ses inclinaisons maxima lorsqu'un creux ou une crête passe sous lui, il est vertical lorsqu'il se trouve

au point où le profil de la houle est le plus incliné (*). De plus, l'angle maximum du roulis sur houle, que nous désignerons par Φ_0, est un multiple de « l'escarpement » ou inclinaison maximum Θ de la houle; il est d'autant plus grand que le couple de frottement c' de l'eau est plus petit, en effet:

$$\Phi_0 = \Theta \frac{P\,(r-a)}{c'\alpha}. \tag{110}$$

(Cela contient l'explication de l'efficacité des quilles latérales pour réduire l'amplitude du roulis.)

Passons maintenant au cas où le gyrostat entre en jeu, l'examen simultané des figures 68 et 69 conduit à une solution particulière des équations (108) et (109) pour

$$\beta = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{3\pi}{2}.$$

La figure 68 indique de plus les conditions

$$I\alpha^2\Phi = P(r-a)\Phi \qquad \text{et} \qquad P(r-a)\Theta = c'\alpha\Phi + kJ\Omega\alpha\Psi$$

que l'on peut écrire :

$$\alpha^2 = \frac{P\,(r-a)}{I} \qquad \text{et} \qquad \Phi = \Theta\frac{P\,(r-a)}{\alpha\, c'} - \frac{k\,J\Omega}{c'}\Psi,$$

dont la dernière peut s'écrire en tenant compte de (110):

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{k\,J\Omega}{c'}\Psi. \tag{111}$$

La figure 69 indique d'autre part qu'il faut satisfaire les relations

$$A\alpha^2\Psi = pl\Psi \qquad \text{et} \qquad c''\alpha\Psi = k\,J\Omega\alpha\Phi$$

que l'on peut écrire :

$$\alpha^2 = \frac{pl}{A} \qquad \text{et} \qquad \frac{\Phi}{\Psi} = \frac{c''}{k\,J\Omega}. \tag{112}$$

(*) La même conclusion est applicable à tous les systèmes oscillants excités par une action synchrone avec amortissement proportionnel à la vitesse. C'est la solution particulière du problème lorsque le régime permanent est établi — c'est le terme non amorti de l'intégrale générale.

Les deux conditions

$$\frac{P(r-a)}{I} = \alpha^2 = \frac{pl}{A}$$

expriment simplement la condition à réaliser pour que les oscillations du gyrostat et du navire soient synchrones (voir note p. 198).

La relation (112) détermine la grandeur du coefficient c'' du frein en fonction du moment cinétique du gyrostat ; elle montre en même temps que les oscillations Ψ du gyrostat sont d'amplitude notablement plus grande que celles du navire. A ce propos, il convient de remarquer que la marche suivie suppose que le balancement de l'équipage gyrostatique se fait librement en de-çà des buttoirs ; il faut pour cela que Ψ ne dépasse pas une certaine limite et dans ces conditions, la relation (112) indique que le coefficient de freinage c'' devra croître en même temps que l'importance du roulis.

La relation (111) exprime que l'amplitude du roulis est moindre avec gyrostat que sans gyrostat d'une quantité d'autant plus grande que $J\Omega$ est plus grand et que les excursions Ψ sont plus amples. En éliminant Ψ entre les relations (111) et (112) on obtient l'expression suivante du roulis du navire avec gyrostat

$$\Phi\left(1+\frac{k^2\, J^2\Omega^2}{c'c''}\right) = \Phi_0\,. \qquad (113)$$

72. *Dimensions à donner au système.* — Les résultats précédents sont applicables au cas d'un navire sur houle synchrone — cas particulier, mais très défavorable — et les indications qu'ils fournissent permettent de dégrossir un projet et de fixer les dimensions du système, de manière à réaliser une réduction convenable du roulis. En effet, si le synchronisme n'avait pas lieu, le navire aurait un roulis d'amplitude Φ'_0 inférieure à celle qui correspond au synchronisme, ce roulis pourrait être assimilé à celui que produirait une houle synchrone au navire, mais d'escarpement Θ moindre ; les dimensions du système étant fixées pour le cas du synchronisme, l'amplitude du roulis Φ'_0 n'en serait

pas moins réduite de $\frac{k\,J\Omega}{c'}\,\Psi$ et le résultat serait donc au moins aussi bon.

Cela étant, reprenons les formules (111) et (112) et cherchons à y introduire des coefficients conformes à l'expérience.

Tout d'abord, le paramètre c' est mal connu, mais on peut l'évaluer en observant le roulis d'un navire sur une houle qui lui est synchrone. Le rapport des inclinaisons Φ_0 et Θ est généralement compris entre 5 et 3, suivant qu'il s'agit d'un bâtiment à formes transversales presque cylindriques ou d'une carène à maître-couple affiné ou pourvue de quilles de roulis efficaces ; en adoptant la valeur moyenne 4, la relation (110) permet d'écrire :

$$\frac{1}{c'} = 4\,\frac{\alpha}{P\,(r-a)}\,.$$

Supposons que l'on désire, par l'emploi du système Schlick, réduire l'amplitude du roulis Φ_0 dans la proportion de 8 à 1, l'équation (113) indique qu'il faudra réaliser

$$\frac{k^2\,J^2\Omega^2}{c'c''} = \frac{\Phi_0}{\Phi} - 1 \geqslant 7\,,$$

en introduisant dans cette condition la valeur qui vient d'être trouvée pour c', elle devient :

$$\frac{k^2\,J^2\Omega^2}{c''} \geqslant \frac{7}{4}\,\frac{P\,(r-a)}{\alpha}\,.$$

Le coefficient c'' qui intervient dans cette dernière inégalité exprime l'intensité de l'action du frein ; l'équation (112) nous indique qu'il dépend de l'amplitude des oscillations que l'équipage gyrostatique pourra effectuer librement. Pour ne pas atteindre les buttoirs, l'angle Ψ devra être limité, on peut s'imposer qu'il ne dépassera pas 15 fois l'amplitude du roulis (cela correspond, par exemple, à 45° pour un roulis réduit à 3°), on aura à satisfaire la condition

$$c'' = k\,J\Omega\,\frac{\Phi}{\Psi} \geqslant \frac{k\,J\Omega}{15}\,. \qquad (114)$$

Cette relation nous renseigne sur l'importance du frein, en la combinant à la précédente, on trouve :

$$k \cdot J\Omega \geq \frac{7}{60} \frac{P\ (r-a)}{\alpha},$$

et en remplaçant la célérité α par sa valeur connue

$$\alpha = \sqrt{\frac{P\ (r-a)}{I}}$$

donnée par l'équation (107), on obtient :

$$k\ J\Omega \geq \frac{7}{60} \sqrt{P\ (r-a)\ I}\ .$$

Si l'on se souvient de la signification du coefficient k et de sa valeur moyenne, on peut écrire :

$$J\Omega \geq \frac{1}{7.5} \sqrt{P\ (r-a)\ I}\ . \qquad (115)$$

Les deux relations (114) et (115) permettent de fixer les grandes lignes d'une installation très efficace ; en effet, pour fixer les idées, si le roulis d'un navire sur houle synchrone est, par exemple, 32° de chaque bord, les formules précédentes définissent un gyrostat qui — dans les mêmes conditions défavorables — réduira le roulis à 4°, les excursions de l'équipage gyrostatique étant de 60°.

Dans les installations réalisées, les gyrostats sont moins puissants que ne l'indique notre formule, mais ils donnent cependant des résultats en tous points remarquables ; ils sont très suffisants, car le cas du synchronisme entre la houle et le navire est rare ; lorsqu'on établira un projet on pourra utiliser la formule (115) en prenant, au lieu du coefficient $\frac{1}{7,5}$ un coefficient m différent, relevé sur des installations existantes, et qui pourra être d'autant plus petit, que le navire devra opérer dans des mers où il aura moins de chances de rencontrer une houle synchrone. On trouvera plus loin le coefficient m calculé pour diverses applications.

La figure 70 donne un exemple des résultats obtenus à bord du *Silvana*, la partie de droite de la ligne sinueuse

représente les inclinaisons du navire pendant que le gyrostat est empêché d'exécuter ses moments de précession, à partir de l'instant où l'équipage a été libre de balancer, on

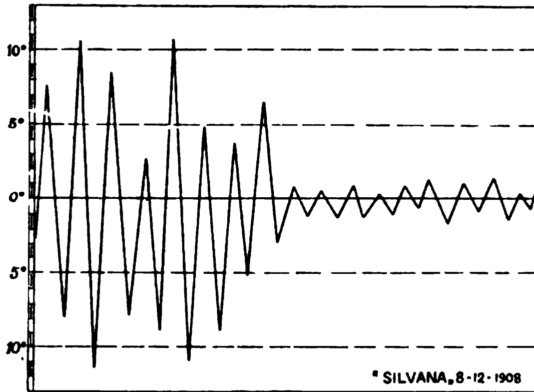


Figure 70.

voit que les inclinaisons de 11° de part et d'autre de la verticale sont ramenées à 1,5° environ.

73. *Remarque sur la fonction du frein. — Emploi d'un frein à couple constant.* — La réduction du roulis est due aux actions combinées du frottement de l'eau sur la carène et du gyrostat. On trouverait une expression analytique de ce fait en additionnant les équations (105) et (106) après avoir multiplié la première par $\frac{d\varphi}{dt}$ et la seconde par $\frac{d\psi}{dt}$; on obtiendrait une relation analogue à l'équation du travail (104) du n° 69 (corollaire du théorème IV).

Un frein à bande ou un frein hydraulique, exerçant un couple constant, pourrait, tout aussi bien que le frein électromagnétique considéré jusqu'ici, absorber du travail et amortir le roulis; l'équation du travail (104) peut à la rigueur suffire à le démontrer.

On peut le vérifier, et en même temps se rendre compte du fonctionnement du système en recourant à la représentation graphique déjà utilisée plus haut (n° 70 et fig. 66 et 67).

Représentons comme plus haut, par les courbes I, II et III

(fig. 71), les déplacements angulaires φ, les vitesses angulaires $\frac{d\varphi}{dt}$ et les valeurs que prend en fonction du temps le couple

$$C_y = -k\, J\Omega \frac{d\varphi}{dt}.$$

L'action de ce couple est contrariée par le frein, dont le moment résistant de grandeur constante est égal à C_F. Aussi longtemps que C_y est inférieur à C_F, le gyrostat ne peut osciller; il commencera à balancer à partir de l'instant où C_y

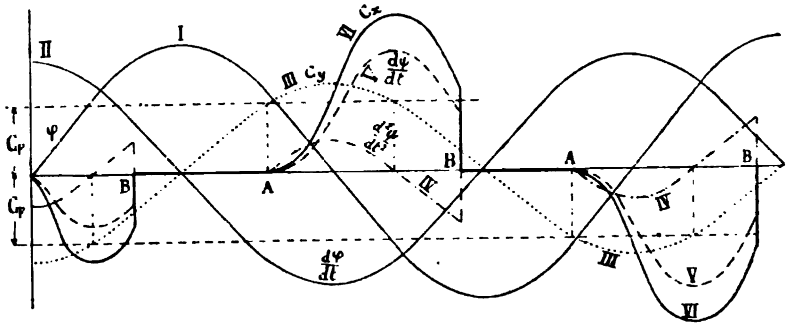


Figure 71.

dépassera C_F, son mouvement sera accéléré pendant tout le temps que le couple moteur surpassera le couple du frein, il se ralentira ensuite, et s'arrêtera dès que la résistance du frein aura absorbé la force vive acquise pendant la période précédente. Le balancement de l'équipage sera donc saccadé, il consistera en mouvements d'oscillations pendant les périodes de durée AB, séparées par des périodes d'immobilité aux deux fins de course. On peut représenter la loi des accélérations $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ (courbe IV), ainsi que celle des vitesses d'oscillation $\frac{d\psi}{dt}$ (courbe V), d'où l'on déduit finalement la loi de variation du couple de réaction gyrostatique transversal C_x que représente la courbe discontinue VI. On voit par la disposition de cette courbe que le couple C_x est

de signe contraire à $\frac{d\varphi}{dt}$ et que, par conséquent, il aura un effet amortisseur.

Remarquons que si le frein exerçait un couple C_F supérieur à la valeur maximum de C_x, il calerait le gyrostat, et celui-ci, immobilisé, n'exercerait aucun effet ; il faut donc satisfaire l'inégalité :

$$C_F < J\Omega\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{max} ;$$

or, dans le cas d'un mouvement pendulaire, on a

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{max} = \frac{2\pi}{T}\Phi ,$$

d'où

$$C_F < \frac{2\pi}{T} J\Omega\Phi .$$

Il résulte de là que le moment résistant du frein devra être inférieur à une certaine limite.

D'autre part, pour que le gyrostat produise tout son effet, il faut qu'il puisse exécuter des balancements d'amplitude suffisante et pour cela il ne suffit pas de satisfaire la condition précédente, il faudra encore proportionner l'action du frein à l'amplitude du roulis.

Oscillations du gyrostat simplement limitées par des buttoirs. — Dans le cas qui vient d'être examiné, le gyrostat est rendu amortisseur par une modification convenable de son mouvement de balancement, due à la présence d'un frein. On peut imaginer d'autres manières de modifier cette loi ; en voici une très curieuse : elle consiste à limiter simplement l'amplitude Ψ des oscillations par des buttoirs fixes. Ce moyen sera mis en œuvre, indépendamment de l'existence d'un frein, puisque nous savons d'autre part que les oscillations doivent être limitées.

La démonstration peut se faire en recourant à la même représentation graphique que plus haut. Les courbes I, II et III (fig. 72) représenteront respectivement les déplacements angulaires du navire, sa vitesse angulaire et le couple gyrostatique C_y, cause du balancement longitudinal de l'équipage.

On peut tracer les courbes des déplacements et de la vitesse angulaire du gyrostat en tenant compte de l'élongation limite Ψ_b, imposée par les buttoirs.

On obtient facilement les diagrammes discontinus IV et V et on en déduit la loi VI que suit la valeur du couple C_x agissant sur le navire. On voit aisément que le sens de ce couple est opposé à la vitesse $\frac{d\varphi}{dt}$ et que l'appareil est amortisseur. De l'examen des courbes de la figure 72, on conclut

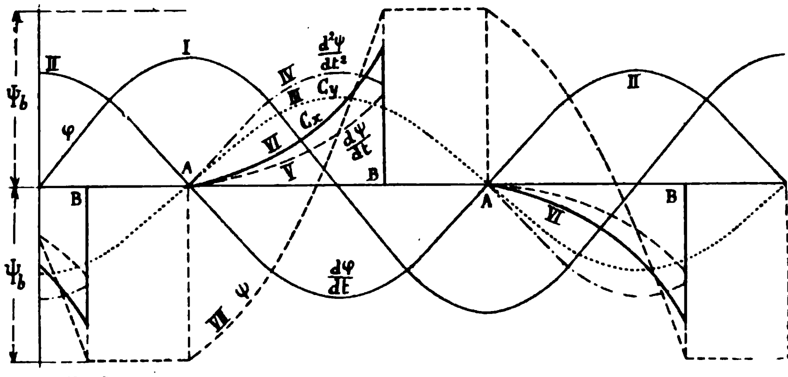


Figure 72

que la loi du mouvement de roulis sera modifiée (amortie) pendant les périodes représentées par les longueurs AB ; le roulis se produira au contraire librement, comme si le gyroscope n'existait pas, pendant que celui-ci est appliqué contre les buttoirs. La durée des périodes d'action du couple amortisseur dépend essentiellement de la position des buttoirs.

Dans les cas où l'on utilise un frein, le travail d'amortissement du roulis est précisément égal à l'énergie dissipée en chaleur dans le frein ; cela se démontrerait facilement, et résulte d'ailleurs directement du corollaire du théorème IV (n° 69).

Dans le cas qui vient d'être examiné, le travail d'amortissement est égal à la force vive détruite par chocs aux extrémités des oscillations de précession; la présence des

buttoirs produit, en quelque sorte, un décalage des oscillations de précession, et le couple C_r, au lieu d'être alternativement amortisseur et excitateur (comme lorsque les oscillations sont libres — cas de la figure 66), est efficacement amortisseur.

Si l'on admet que, dans ces conditions, le couple C_r est amortisseur pendant toute la durée des balancements du gyrostat, on peut obtenir très simplement une formule permettant d'établir les dimensions d'un gyrostat amortisseur.

En effet, pendant chaque mouvement de balancement, l'extrémité du vecteur du moment cinétique $\overline{J\Omega}$ aura parcouru dans le plan longitudinal un arc 2Ψ ; il faut pour cela qu'il ait reçu une impulsion dont la grandeur peut être définie par

$$2J\Omega \sin \Psi .$$

Cette impulsion, communiquée par le navire, sera fournie aux dépens de l'énergie cinétique du roulis ; en d'autres termes, le moment cinétique du navire sera réduit à chaque oscillation simple, d'une fraction d'elle-même que nous représenterons par χ. Si l'on note que le moment cinétique du navire est maximum lorsque le navire passe par sa position droite (lorsque toute l'énergie du roulis est sous forme cinétique) et qu'il est alors égal à

$$I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{max} = I\frac{2\pi}{T}\Phi_0 ,$$

on peut en déduire l'équation

$$2J\Omega \sin \Psi = \chi I \frac{2\pi}{T}\Phi_0 ,$$

qui peut s'écrire :

$$J\Omega = \frac{\chi\Phi_0}{2 \sin \Psi} . \sqrt{P (r-a) I} .$$

Si nous supposons $\Psi = 45°$, on obtient :

$$J\Omega = \frac{\chi\Phi_0}{\sqrt{2}} \sqrt{P (r-a) I} ;$$

en l'écrivant sous la forme plus simple :

$$J\Omega = \frac{1}{5}\Phi_0 \sqrt{P (r-a) I} ,$$

on retrouve la formule pratique proposée par M. Föppl ; on voit qu'elle correspond au cas où le moment cinétique du navire serait réduit à chaque oscillation de

$$\chi = \frac{\sqrt{2}}{5} = 0{,}283 \ .$$

74. *Réalisation pratique.* — Pour la description complète des appareils, nous renverrons aux mémoires du



Figure 73.

Dr Schlick (*71*) et de sir William White (*76*). Bornons-nous à dire que les volants sont entraînés normalement par un électromoteur; dans les deux premières installations, où l'on a dû utiliser la vapeur, le volant est muni d'ailettes et tourne comme un disque de turbine d'action. L'ensemble, volant et moteur, se trouve dans un carter qui peut osciller autour des tourillons TT qui reposent dans des paliers solidement reliés au navire. Un frein hydraulique, ou un frein à bande, généralement les deux à la fois, permettent d'exercer sur les oscillations longitudinales un freinage d'intensité réglable et au besoin de bloquer l'appareil pour suspendre son action.

La figure 73 est une photographie de l'appareil du steamer *Lochiel*.

Le tableau ci-après réunit les caractéristiques principales de trois installations :

	SEEBAR	LOCHIEL	SILVANA
Longuenr — largeur — tirant d'eau	35.6 – 3.81 – 1.14	41.1 – 6.7 – 2.75	62.5 – 9.0 – 2.71
Déplacement . P kg.	57000	360000	850000
Hauteur métacentrique $(r - a)$. . . . . m.	0.50	0 275	0 401
Période propre du roulis . . . . . . sec	4.14″	9.0″	8.0″
Moment d'inertie longit. I	12373	214000	552543
Diamètre et poids du gyrostat	1.00 m. – 500 kg.	1.20 m. – 3000 kg.	1.60 m. – 5100 kg.
Nombre de tours par minute	1600	1800	1800
Vitesse périphérique m/sec	83.77	113	150.8
Vitesse angulaire Ω rad/sec	167.55	188.6	188.6
Moment d'inertie J k/g m²	10.69	158.5	176.5
Moment cinétique JΩ .	1789	11000	33300
Amplitude du balancement Ψ	45°	75°	75°
Coupe maximum de redressement $J\Omega \frac{2\pi}{T} \Psi$	2130	10000	34200
Coefficient m de la formule (115)	$\frac{1}{10.5}$	$\frac{1}{13.4}$	$\frac{1}{13}$

Les résultats obtenus par l'emploi du système Schlick comme amortisseur de roulis sont remarquables en tous points ; la figure 70 permet de s'en rendre compte. Son fonctionnement pratique donne lieu cependant à un certain nombre de remarques par lesquelles nous terminerons cet exposé (*).

(*) Il n'est pas inutile de signaler ici une critique adressée au principe même de l'invention du Dr Schlick, d'après laquelle il devrait provoquer l'apparition de mouvements de tangage et de roulis dangereux.

Pendant que l'appareil fonctionne, le couple exercé par le frein dans

1° Les volants qui constituent les gyrostats sont des pièces de dimensions et de poids considérables, leurs vitesses périphériques sont très élevées, leur construction exige donc un métal spécialement résistant et des soins tout particuliers.

2° Pendant un mouvement de balancement du gyrostat, de $+\Psi$ à $-\Psi$, qui s'effectue en une demi-période de roulis, la vitesse angulaire maximum de précession atteint $\frac{2\pi}{T}\Psi$ et le couple de réaction gyrostatique correspondant est

$$J\Omega\frac{2\pi}{T}\Psi .$$

C'est la valeur maximum du couple de redressement C_x exercé sur le navire. Le tableau précédent indique les valeurs de ce couple, pour les trois cas considérés. On voit qu'il s'agit d'efforts considérables qui sont transmis du gyrostat à la coque par l'intermédiaire des tourillons de l'axe du volant et des tourillons transversaux ; ces pièces se

---

le plan longitudinal du navire réagit sur la coque et tend à produire un tangage. En d'autres termes, une partie seulement de l'énergie du roulis est transformée en chaleur dans le frein, une autre se dissipe en produisant du tangage. Ce raisonnement est exact et M. Skutsch (77) a pu reproduire le tangage annoncé au moyen d'un modèle ; on l'observerait également sur un navire qui ne serait pas plus long que large. Mais il ne faut pas oublier que le couple à exercer sur un navire de formes courantes pour produire une inclinaison de tangage est à peu près cent fois plus grand que celui qui produirait la même inclinaison dans le sens du roulis ; d'autre part, le couple du frein $C_F < \frac{2\pi}{T} J\Omega\,\Phi$ est plus faible que le couple de redressement (à peu près dans le rapport de Φ à Ψ soit environ 10 à 15) ; dès lors, si un appareil Schlick parvient à maintenir un bateau sensiblement droit sur une houle qui prend des inclinaisons de 8° par exemple, l'amplitude du tangage que produira le couple C_F sera mesurée par un angle environ 1000 fois plus faible. L'influence de l'installation gyrostatique sur le tangage peut donc être considérée comme négligeable ; il n'en était pas ainsi pour le modèle de M. Skutsch, qui n'oscillait pas du tout dans des conditions analogues à celles d'un navire.

Dans le même ordre d'idées, une autre objection a été formulée, à première vue beaucoup plus grave : si le bateau tangue, le gyrostat, forcé par le frein à participer à ce mouvement, exercera sur le navire un couple transversal et le fera rouler ; c'est ce que M. Skutsch a parfaite-

trouvent par le fait soumises à des efforts qui dépassent les limites généralement admises en construction mécanique. Pour le *Silvana*, par exemple, les tourillons supportent 30 kilos par cm^2 avec une vitesse circonférentielle de 21 mètres par seconde ; les questions du graissage forcé et de la réfrigération des paliers se posent donc dans des conditions particulièrement difficiles.

3° Dans les trois installations citées plus haut, le volant relativement le plus léger pèse $\frac{1}{150}$ du poids du navire. Mais il s'agit là de navires relativement peu importants et on peut se demander si pour des navires de plus en plus grands le système pourrait encore être adopté dans des conditions aussi satisfaisantes.

Pour nous en rendre compte, considérons une série de navires géométriquement semblables pourvus de gyrostats

---

ment vérifié au moyen de son modèle. Dans le cas du navire véritable, cela est cependant peu à redouter.

Supposons, pour prendre un cas défavorable, que le gyrostat soit calé par son frein, il subira intégralement les inclinaisons de tangage ; supposons de plus que le navire tangue sans rouler ; on sait par expérience que les mouvements de tangage sont toujours de faible amplitude ; le couple de réaction gyrostatique qui en résultera sera faible et il en sera de même, par suite, du roulis auquel il peut donner naissance. En prenant $J\Omega = 33300$ (cas du « Silvana ») et une vitesse angulaire de tangage $\omega = 0{,}078$ rad./sec. (cas d'un fort tangage considéré au n° 26), on obtient un couple de chavirement de 2597 kg. m., capable de produire sur le même bateau une inclinaison statique de 0.43°. Ce couple à action alternative peut provoquer l'apparition de roulis, mais il faudrait pour qu'il devienne dangereux que le tangage et le roulis du navire aient des périodes propres identiques, ce qui n'a pas lieu.

L'expérience s'est chargée de répondre à ces critiques et de dissiper les craintes qu'elles ont fait naître, nous avons eu personnellement l'occasion de nous en rendre compte au cours d'essais effectués à bord du *Seebar*.

Pour éviter ces inconvénients, M. Skutsch (77) a proposé d'employer deux gyrostats égaux tournant en sens opposés ; pendant le roulis, ils prendraient à chaque instant des inclinaisons opposées et exerceraient par l'intermédiaire de leurs freins des moments de tangage qui s'annuleraient. Ce perfectionnement du système Schlick est très rationnel, mais, comme nous venons de l'indiquer, la pratique n'en a pas démontré la nécessité.

fonctionnant dans des conditions semblables ; appliquons leur la relation

$$J\Omega = m\sqrt{P(r-a)I} \tag{115}$$

le coefficient m étant supposé constant pour toute la série, le second membre augmente comme la puissance 9/2 des dimensions linéaires λ du navire. Il devra donc en être de même du produit $J\Omega$; or, J varie comme la 5e puissance des dimensions linéaires r du volant, dès lors nous pouvons écrire :

$$r^5 . \Omega \rightarrow \lambda^{\frac{9}{2}}$$

Si nous supposons que tous les gyrostats tournent avec la même vitesse angulaire, Ω devenant constant, nous aurions:

$$r \rightarrow \lambda^{\frac{9}{10}}$$

et le poids du volant proportionnel à r^3 serait croissant comme la puissance 27/10 des dimensions du bateau.

Mais l'hypothèse de Ω constant n'est pas admissible, la résistance des matériaux exige plutôt que la vitesse périphérique, proportionnelle à $r\Omega$, soit constante ; dès lors, il vient :

$$r^4 \rightarrow \lambda^{\frac{9}{2}}$$

d'où l'on déduit que les dimensions linéaires du volant varieront comme la puissance 9/8 de λ, de là:

$$r^3 \rightarrow \lambda^{\frac{27}{8}} > \lambda^3 \tag{116}$$

Le poids du volant augmente donc plus vite que proportionnellement au déplacement du navire.

Les difficultés d'établissement paraissent donc devoir aller en croissant avec l'importance des installations ; l'avenir de l'invention se trouve ainsi lié, dans une certaine mesure, aux progrès de la construction mécanique.

75. Monorail gyrostatique. — Un monorail (*) peut être assimilé à un pendule renversé, normalement instable ; l'action du vent, les déplacements de poids, les réactions d'inertie en courbe, sont autant de causes qui tendent à le faire chavirer, si une action consciente ou automatique n'intervient pour forcer à chaque instant la résultante de toutes les forces appliquées au système à passer par le rail.

Il n'est pas possible d'exercer un couple rigoureusement égal — et au même instant — au couple perturbateur; il s'écoulera toujours un certain délai, qui peut être très court, entre l'apparition de l'inclinaison et la mise en action du couple stabilisateur; dès lors, on peut tout au plus espérer substituer au mouvement de chavirement un mouvement pendulaire de faible amplitude.

La difficulté pratique consiste surtout à faire exercer un couple transversal extérieur, par un appareil en quelque sorte intérieur au système; c'est ce qui semble paradoxal, à première vue, dans l'idée du monorail.

La propriété fondamentale du gyrostat, à savoir que tout mouvement de son axe dans un plan produit une réaction dans un plan perpendiculaire, permet cependant d'entrevoir la possibilité d'un tel résultat. On peut, en effet, faire exercer sur le wagon un couple transversal par un gyrostat prenant appui dans le plan longitudinal du wagon qui ne cesse de contenir le rail fixe.

Imaginons que le véhicule (fig. 74) porte un gyrostat, libre d'osciller autour de TT dans le plan longitudinal. Un homme qui agirait adroitement sur la poignée P pourrait entretenir des mouvements de précession forcée et créer ainsi des couples de réaction transversaux capables à chaque instant

(*) Nous n'accordons évidemment pas cette dénomination aux véhicules suspendus à un rail unique aérien (Barmen-Elberfeld), ni aux soi-disant monorails qui roulent en fait sur trois rails (système Behr).

On cherche à faire du monorail un véhicule industriel pour éviter les inconvénients dus aux tassements inégaux des deux files de rails des voies ordinaires, pour réduire les frais d'établissement de la voie et aussi pour diminuer les résistances passives du matériel roulant. Ces considérations peuvent justifier l'emploi du monorail pour les communications à grande vitesse et pour les voies coloniales coûteuses de premier établissement.

de neutraliser l'effet des couples perturbateurs, ou plus exactement de ramener le véhicule à une inclinaison d'équilibre.

Considérons le wagon pendant qu'il s'incline, par exemple vers la droite, sous l'influence d'une force perturbatrice quelconque ; il entraînera l'équipage gyrostatique en exerçant sur lui le couple transversal nécessaire pour vaincre

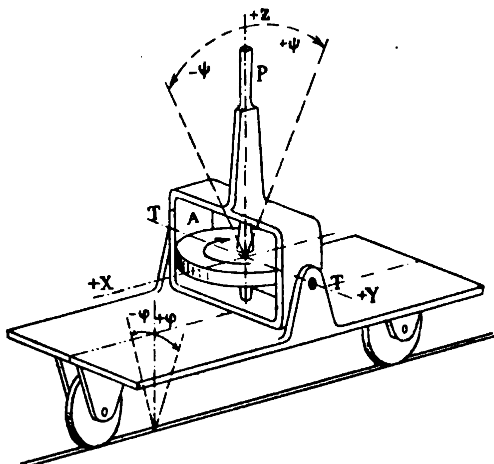


Figure 74.

son inertie. Ce couple produit une précession du gyrostat dans le plan longitudinal du wagon ; cette précession forcée provoque, à son tour, un couple de réaction gyrostatique opposé au déversement du véhicule.

Nous ne nous attarderons pas à démontrer que ce couple sera égal rigoureusement à celui exercé sur l'équipage oscillant par le véhicule ; il neutralisera ce dernier couple, mais n'arrêtera pas le mouvement de chavirement.

Si, au lieu de laisser se produire le balancement $\frac{d\psi}{dt}$ par le jeu naturel de l'effet gyrostatique, on exerce sur l'équipage un couple C qui accélère son mouvement de précession, on pourra produire une vitesse $\frac{d\psi}{dt}$ suffisante pour que

le couple transversal de réaction:

$$C_x = J\Omega \frac{d\psi}{dt} \cos \psi$$

soit assez grand pour contrarier le chavirement et ramener le véhicule dans sa position d'équilibre.

Le mouvement de précession, excité par le couple C_E, entraînera le redressement du wagon. Il convient de suspendre l'action de C_E dès que la position droite — plus exactement la position d'équilibre — est atteinte, et même un peu avant, pour éviter que le véhicule dépassant cette position ne chavire vers la gauche.

Remarquons que, aussitôt l'action de C_E arrêtée, tandis que le véhicule oscille de droite à gauche, le cadre A, incliné du côté des ψ négatifs, retournera vers sa position moyenne par le jeu naturel de l'effet gyrostatique.

Si la position d'équilibre du véhicule, au lieu d'être atteinte sans vitesse, est dépassée, il faut combattre le chavirement qui tend à se produire cette fois vers la gauche ; à cette fin, il faudra accélérer la précession du cadre A vers les ψ positifs en exerçant sur lui un couple excitateur de sens opposé à celui qui avait dû être exercé lors du mouvement vers la droite.

En résumé, il faut que le conducteur qui manœuvre la poignée P excite les mouvements naturels de précession du gyrostat pendant que le véhicule tend à s'incliner, et suspende au contraire cette action lorsque le véhicule tend à reprendre sa position d'équilibre ; son intervention devra donc se produire au moment opportun et dans un sens approprié ; il n'est pas impossible qu'un homme arrive à exécuter ces manœuvres d'une manière réflexe.

Il est presque superflu d'ajouter que le travail dépensé dans ces conditions par le conducteur du monorail serait rigoureusement égal au travail nécessaire pour ramener le véhicule à une position d'équilibre contre le couple perturbateur.

76. *Réalisation de l'automatisme.* — Si l'on veut rendre rendre automatique le fonctionnement qui vient d'être indi-

qué, il faut remplacer l'action de l'homme par celle d'un servo-moteur dont le sens d'action pourra changer automatiquement à l'instant opportun.

Une première solution consiste à utiliser le poids même du gyrostat comme force motrice en disposant l'axe d'oscillation TT de l'équipage en dessous de son centre de gravité. Dès que le véhicule s'inclinera, l'axe du gyrostat s'éloignera de sa position moyenne dans le plan longitudinal du wagon et son mouvement sera accéléré, ou excité, par l'action de la pesanteur ; cela peut suffire à ramener le wagon vers la position droite. Pendant ce retour du véhicule à la position d'équilibre, le sens du mouvement de précession de l'équipage est renversé, et, tandis que le gyrostat retourne à sa position moyenne, son mouvement sera ralenti par le couple de la pesanteur. Le travail de ralentissement étant rigoureusement égal au travail d'accélération, on démontrerait sans peine que le véhicule sera animé d'un mouvement d'oscillation non amorti.

Cette solution, pratiquement insuffisante, réalise les conditions du théorème III (n° 67), L et c sont négatifs, les mouvements ψ et φ seront déphasés l'un par rapport à l'autre d'un quart de période ; il y aura un continuel échange d'énergie entre le véhicule et le gyrostat, mais pas d'amortissement.

Une deuxième solution, suggérée par le théorème IV (n° 68), consisterait à disposer d'un couple proportionnel à l'élongation ψ et d'un second couple proportionnel à la vitesse angulaire $\frac{d\psi}{dt}$. On se rend compte que le couple $C_E = c\psi + c'' \frac{d\psi}{dt}$, obtenu en faisant la somme algébrique des deux précédents, exciterait la précession de l'équipage pendant les quarts de période où il s'éloigne de sa position moyenne beaucoup plus énergiquement que pendant les quarts de période où il retourne de ses élongations maxima à sa position moyenne ; cela se traduirait en fin de compte par un travail excitateur positif équivalent à un travail de redressement efficace.

En reprenant les notations adoptées antérieurement, les équations des deux mouvements φ et ψ s'écrivent :

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} - kJ\Omega\frac{d\psi}{dt} - PL\varphi = o .$$

$$A\frac{d^2\psi}{dt^2} + kJ\Omega\frac{d\varphi}{dt} - c\psi - c''\frac{d\psi}{dt} = o .$$

Ces équations ne diffèrent guère de celles qui ont été écrites au n° 71 (en note) à propos du système Schlick et qui ont été étudiées par M. Föppl. On conclurait de leur étude que le mouvement φ se ramène à la superposition de deux mouvements amortis et que le mouvement ψ se ramène à la superposition de deux mouvements sensiblement en phase avec les précédents.

Les inventeurs ne paraissent pas jusqu'ici avoir réalisé la solution théorique qui vient d'être indiquée, sans doute faute d'un organe pratique capable d'exercer sur un pendule un couple excitateur proportionnel à sa vitesse angulaire et changeant de sens en même temps qu'elle ; il semble cependant qu'ils cherchent à s'en approcher. Le seul procédé assez complètement décrit est celui du modèle de monorail Brennan, présenté à la Société Royale de Londres, le 8 mai 1910 ; le couple excitateur C_E y est développé par un dispositif ingénieux, mais qui s'accommoderait mal d'une réalisation en grand (voir plus loin).

Dans leurs grands véhicules expérimentaux, Brennan (*80*) et Scherl (*82*) excitent les mouvements de précession de leurs gyrostats au moyen d'un servo-moteur, à air comprimé ou à huile sous pression, dont le sens d'action est commandé par un organe sensible au sens de déplacement, soit du wagon, soit de l'équipage gyrostatique oscillant ; nous ne pouvons pas en dire davantage, le principe de ces dispositifs étant gardé absolument secret.

Pour fixer les idées, nous avons représenté (fig. 75) le schéma d'un dispositif possible ; sans grand effort d'imagination on en combinerait d'autres équivalents, à condition, bien entendu, de ne pas s'inquiéter des difficultés expérimentales à vaincre pour les réaliser.

L'équipage gyrostatique G peut osciller dans le plan longitudinal du véhicule (plan de la figure) autour de l'axe des tourillons T, son centre de gravité se trouve établi au-dessus de cet axe. Un piston P qui se déplace dans un cylindre hydraulique ou pneumatique, peut exercer sur l'équipage un couple excitateur C_P de sens convenable. A cet effet, le fluide sous pression est distribué sur les deux faces du piston par un tiroir D dont les positions ne sont pas fonction de celles du piston P ou du gyrostat, mais dépendent uniquement du sens du mouvement d'oscillation de celui-ci.

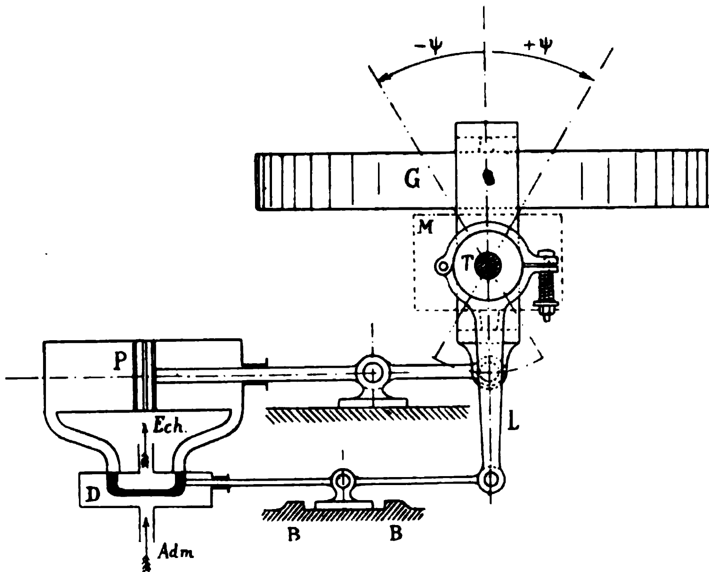


Figure 75.

Le tiroir D est conduit par le bras de levier L entraîné dans le mouvement de l'axe des tourillons T. Le levier L n'est pas calé sur cet axe, mais simplement emmanché à frottement ; d'autre part, la course du tiroir est limitée par les buttoirs B. Dès lors, suivant que la vitesse angulaire $\frac{d\psi}{dt}$ est positive ou négative, le tiroir D se trouvera à l'un ou à l'autre de ses bouts de course, et l'on voit que, aussitôt un mouvement de précession amorcé, le tiroir D occupera

la position qui convient pour que le piston P exerce un couple C_P qui accélère le mouvement commencé.

Cela étant, si le véhicule se penche de côté, le gyrostat s'inclinera, par exemple, vers les ψ positifs, son mouvement sera accéléré par un couple C_P auquel s'ajoutera le couple $pl \sin \psi$ dû à la pesanteur. Si le système est convenablement proportionné, la précession forcée par le couple $C_E = (C_P + pl \sin \psi)$ provoquera un couple de réaction gyrostatique suffisant pour ramener le véhicule vers sa position d'équilibre.

Le mouvement de chavirement du véhicule fait donc place à un mouvement de redressement accéléré ; ce mouvement produit par réaction gyrostatique un couple opposé à C_E, qui diminue la vitesse de précession forcée $\frac{d\psi}{dt}$, puis l'annule et la renverse; dès cet instant, le couple C_P change de sens et la précession $\frac{d\psi}{dt}$, devenue négative, est aidée par un couple $C'_E = (C_P - pl \sin \psi)$, qui peut être faible et même antagoniste.

L'équipage gyrostatique retourne ainsi, d'un mouvement relativement lent, à sa position moyenne ; si le véhicule se trouve en même temps dans sa position d'équilibre, le gyrostat restera dans sa position moyenne ; si, au contraire, le véhicule a dépassé sa position d'équilibre et commence à chavirer vers la gauche, la précession continuera du côté des ψ négatifs et sera accélérée par un couple $(C_P + pl \sin \psi)$.

Les mêmes mouvements se reproduiront avec des amplitudes graduellement décroissantes ; le travail dépensé pour la stabilisation et l'amortissement est $2\, C_P\, \Psi$ par oscillation simple (*).

(*) Un petit modèle de démonstration, fonctionnant à peu près suivant le même principe, mais utilisant, au lieu d'un piston hydraulique, un noyau de fer doux aspiré dans des solénoïdes, a été établi par M. Drucker (*90*).

On pourrait aussi mettre la commande du distributeur D sous la dépendance d'un pendule dont la masse se porte à droite ou à gauche, suivant les inclinaisons du wagon. Cela paraît être le principe du brevet Schilowski (*91*).

Remarque. — Nécessité d'employer deux gyrostats. — Au lieu d'avoir un gyrostat disposé comme l'indiquent les figures 74 et 75, la position moyenne de l'axe du gyrostat pourrait être tout aussi bien horizontale et transversale au wagon, comme dans les schémas théoriques des figures 61 et 64.

Cette seconde disposition, toutefois, présente un inconvénient ; lorsque le véhicule parcourra une courbe, le gyro-

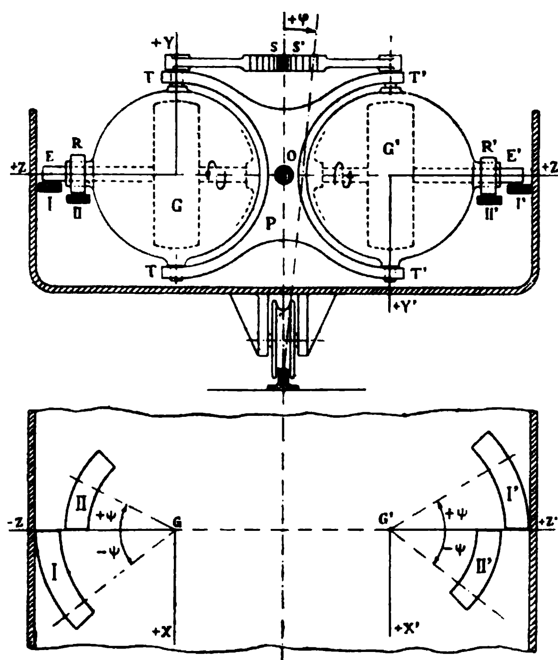


Figure 76.

stat participera à une précession forcée et exercera un couple de chavirement (voir n° 29). Pour éviter ce défaut, on doit utiliser deux gyrostats tournant en sens inverses et dont les mouvements de précession sont également opposés, de manière à ce que la résultante des deux moments cinétiques $J\Omega$ ait une composante transversale nulle. De cette façon, chacun des deux gyrostats agira pour son propre compte en ce qui concerne la stabilisation ; en courbe, ils produiront

deux couples de chavirement égaux et opposés, qui se neutraliseront et ne se manifesteront que par des efforts intérieurs au système (Brennan).

Lorsqu'on adopte la disposition à axe vertical, on peut se contenter d'un gyrostat unique ; mais les inégalités du rail, les changements de pente, etc., peuvent provoquer des couples de chavirement, et il est recommandable d'utiliser quand même deux gyrostats dont les mouvements de balancement dans le plan longitudinal sont symétriques (Scherl).

Complétons ces indications par une description sommaire du procédé mis en œuvre dans le modèle désormais célèbre de Brennan.

Les gyrostats G et G′ (fig. 76), au nombre de deux, pour la raison qui vient d'être indiquée, sont identiques, ils tournent en sens inverses et peuvent exécuter des mouvements de précession autour des axes TT et T′T′, ces axes portent les secteurs dentés S et S′ qui engrènent entre eux, de telle manière que les positions occupées par les deux gyrostats sont à chaque instant symétriques par rapport au plan longitudinal du wagon. Les gyrostats sont maintenus en mouvement par des électromoteurs ; ils tournent dans des carters étanches où l'air est raréfié.

L'ensemble des deux gyrostats est porté par une pièce P qui n'est pas rigidement fixée au wagon, mais peut prendre de petites inclinaisons transversales par rapport à lui en oscillant autour de O. Lorsque le wagon est vertical, la pièce P est disposée comme l'indique la figure, l'alignement EOE′ est horizontal et les extrémités E et E′ des axes des gyrostats ne touchent pas les guides I et I′, fixés au wagon.

Imaginons que le véhicule s'incline vers la droite $(+\varphi)$, nous savons que les gyrostats se mettront en mouvement de précession du côté des ψ négatifs, mais en même temps le guide I s'élève, tandis que l'axe E, qui fait partie du système pendulaire P, tend à conserver son horizontalité ; le guide I rencontrera bientôt le bout d'axe E et, dès l'instant du contact, celui-ci roule sur le guide I, sa précession

se trouve accélérée et par réaction gyrostatique, il appuie sur le guide I, au point de redresser le véhicule.

Si le véhicule s'était incliné vers la gauche, les mêmes phénomènes se seraient passés, mais le couple de redressement eut été exercé sur le guide I′ par le bout d'arbre E′.

Les axes des gyrostats se trouvent donc écartés de leur position moyenne du côté des ψ négatifs, tandis que le véhicule se redresse et s'approche de sa position d'équilibre ; le mouvement de redressement du véhicule est accéléré, tandis que l'ensemble pendulaire P, qui n'est sollicité par aucun couple extérieur, tend à conserver son orientation. Il s'ensuit que bientôt le guide I abandonne la pièce E qui le poussait vers le bas, tandis que l'extrémité de l'axe du gyrostat G′ est atteinte peu après par le guide correspondant. Remarquons que le guide I′, qui correspond au bout d'axe E′ du gyrostat G′, ne se prolonge pas du côté des ψ négatifs, et c'est en réalité un autre guide II′ qui rencontrera le rouleau R′ libre de tourner autour de l'extrémité du carter de G′, mais indépendant de l'axe E′. Le rouleau R′ étant pressé de bas en haut par le guide II′, les deux gyrostats exécutent un mouvement de précession positif qui les ramène à leur position moyenne.

Si l'action du couple de redressement est trop énergique, le véhicule franchit sa position d'équilibre et tend à tomber vers la gauche. En même temps la vitesse de précession positive des gyrostats leur fera dépasser leur position moyenne, et le bout d'axe E′, rencontrant le guide I′, roulera sur ce dernier en provoquant le redressement du véhicule.

Il y a deux points intéressants à noter au sujet de ce dispositif ingénieux.

La vitesse de la précession forcée $\frac{d\psi}{dt}$ dépend du diamètre des bouts d'arbre E et E′, et le travail dépensé pour entretenir cette précession est fourni par l'électromoteur même qui entretient la vitesse de l'un des gyrostats.

Lorsque les gyrostats s'éloignent de leur position moyenne, leur précession est accélérée ; pendant le mouvement de retour à leur position moyenne, elle est légèrement ralentie par le frottement des rouleaux R et R′.

Des indications qui précèdent, on peut déduire quelques propriétés particulières que présentera le fonctionnement des monorails gyrostatiques ; ces propriétés ont, d'ailleurs, été vérifiées par les expériences de Brennan :

1°) Le véhicule étant chargé brusquement d'une manière dissymétrique commence par s'incliner un peu en cédant au couple perturbateur, puis, soulevant le côté le plus chargé, il s'incline en sens inverse, de manière à retrouver une position d'équilibre. Cette dernière position est atteinte après quelques oscillations rapidement décroissantes ;

2°) Le véhicule résiste particulièrement bien à un couple de déversement appliqué brusquement ; le couple de réaction gyrostatique développé est alors si grand que le chavirement est contrecarré avant même que le wagon ait pris une inclinaison sensible ;

3°) En courbe, le wagon s'incline de manière à ce que la résultante du poids et de la réaction centrifuge passent par le rail ; il s'incline donc comme le ferait un véhicule ordinaire sur une voie ayant partout le devers théorique ;

4°) Si l'on empêche le véhicule de s'incliner jusqu'à sa position d'équilibre, le gyrostat oscille jusqu'au bout de sa course, y reste arrêté, et le véhicule se renverse. La même chose se produit si l'on empêche le gyrostat d'effectuer complètement ses oscillations de précession.

77. *Etude quantitative. — Dimensions à donner à un gyrostat de monorail.* — Pour dimensionner un gyrostat de monorail, il faut commencer par s'imposer une inclinaison Φ que l'on ne veut pas voir dépassée, cette inclinaison étant comptée à partir de l'inclinaison d'équilibre.

Connaissant exactement le mode de fonctionnement du système particulier que l'on emploie, on pourrait écrire deux équations analogues aux équations (100) et (101), respectivement pour le véhicule et pour l'équipage oscillant. Leur résolution serait très pénible et, en général même, inutile, parce que, pour rendre les équations maniables, il faudrait le plus souvent y introduire des hypothèses simplificatives pouvant dénaturer complètement les résultats et

les rendre très aléatoires. En tout cas, on n'obtiendrait ainsi que la loi du mouvement que prendrait le véhicule après avoir été légèrement écarté de sa position d'équilibre.

On peut aussi, et ce serait plus simple, chercher à vérifier si les dimensions adoptées pour un gyrostat seront suffisantes pour maintenir les oscillations du wagon dans des limites convenables. A cet effet, on peut étudier une perturbation causée par un couple bien défini. En tenant compte des conditions initiales, les équations d'équilibre du véhicule et du gyrostat peuvent être intégrées (au besoin graphiquement et par tâtonnements). En examinant séparément les périodes d'inclinaison et de redressement, on arrivera à se rendre compte de la grandeur de l'inclinaison maximum Φ. Le calcul serait plus long que difficile.

Mais pour procéder à un tel calcul, en quelque sorte de vérification, il faut s'être, au préalable, fixé les dimensions approximatives du gyrostat et du système accélérateur, c'est-à-dire qu'il faut avoir dégrossi le projet en utilisant une méthode approchée.

Voici un procédé de calcul rapide, mais, il est vrai, très sommaire :

Soit Φ l'inclinaison du wagon — comptée à partir de l'inclinaison d'équilibre — que l'on ne veut pas dépasser. En l'absence de stabilisateur, à l'instant où cette inclinaison serait atteinte, la vitesse angulaire du wagon serait donnée sensiblement par :

$$\mathrm{I}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2_{\varphi=\Phi} = 2\mathrm{PL}\Phi^2 .$$

C'est un minimum qui suppose que le véhicule s'incline sous la seule action de la gravité, il faut donc prévoir une vitesse angulaire réelle plus grande et en appelant χ un coefficient supérieur à l'unité, nous aurons :

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\varphi=\Phi} = \chi\Phi\sqrt{\frac{2\mathrm{PL}}{\mathrm{I}}} .$$

Le gyrostat, d'autre part, exerce un couple de redressement transversal

$$c = \mathrm{J}\Omega\frac{d\psi}{dt}\cos\psi ,$$

qui pendant une excursion totale de o à Ψ donne lieu à une impulsion

$$\int c dt = J\Omega \int_o^\Psi \cos\psi \frac{d\psi}{dt} . dt = J\Omega \sin\Psi .$$

Cette impulsion occasionnera une réduction du moment cinétique du wagon autour du rail, et si l'on veut combattre le chavirement, il importe que l'on ait

$$J\Omega \sin\Psi > I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\varphi=\Phi} .$$

$$J\Omega \sin\Psi > \chi\Phi \sqrt{2PLI} . \qquad (117)$$

Cette relation permet de déterminer l'ordre de grandeur du gyrostat $J\Omega$, capable de « négocier » les efforts stabilisateurs ; il reste à déterminer la grandeur du couple excitateur à exercer, nous pouvons dire que le travail de ce couple C_E doit être au moins égal au travail de redressement, d'où la condition:

$$C_E \Psi > PL\Phi^2 . \qquad (118)$$

Nous savons par une remarque faite au début de ce chapitre (n° 59) que l'angle Ψ ne doit pas dépasser une certaine limite, on peut considérer Ψ comme une quantité constante pour tous les monorails et nous voyons dès lors par les inégalités (117) et (118) que les dimensions des organes du gyrostat, pour un véhicule donné, sont uniquement fonction de l'inclinaison maximum Φ.

L'équation (117) n'a pas une valeur absolue, mais elle peut être prise comme formule de similitude pour comparer les conditions de fonctionnement de monorails gyrostatiques géométriquement semblables.

Les quantités qui interviennent dans la relation (117) peuvent être exprimées facilement en fonction des dimensions linéaires λ du wagon et r du gyrostat; il n'y a de difficulté que pour Φ, dont on ne peut pas dire *à priori* comment il varie en fonction de λ.

Cet angle Φ doit être évalué en fonction des couples perturbateurs agissant habituellement sur le système, et nous pouvons admettre qu'il est proportionnel aux inclinaisons

statiques φ_0 qu'il faudrait donner, en sens inverse, au véhicule, pour équilibrer ces couples.

On trouve facilement les inclinaisons φ_0 en fonction des dimensions. Par exemple, dans le cas du véhicule exposé à un vent de côté, la pression v du vent par m² de la surface latérale S sera la même pour les grands véhicules que pour les petits, en désignant par h la hauteur du point d'application de cette poussée au-dessus du rail, on obtient :

$$\varphi_0 = \frac{vSh}{PL} \text{ proportionnel à } \lambda^{-1}.$$

Si l'on suppose un mouvement de voyageurs d'un poids p se portant d'un côté à l'autre du wagon, en parcourant un trajet horizontal b, on aurait :

$$\varphi_0 = \frac{pb}{PL},$$

or, p peut être considéré comme proportionnel à la surface en plan du wagon et b à sa largeur ; on en déduit que, dans ce second cas également, l'inclinaison est inversement proportionnelle aux dimensions linéaires du véhicule.

On peut encore considérer l'effet de la réaction d'inertie centrifuge dans la circulation en courbe. Soit M la masse, V la vitesse du véhicule, R le rayon de la voie, on aura :

$$\varphi_0 = \frac{ML}{PL}\frac{V^2}{R} = \frac{1}{g}\frac{V^2}{R}.$$

Lorsqu'il s'agit de véhicules ordinaires à deux rails, c'est le devers de la voie qui définit le rapport $\frac{V^2}{R}$; dans le cas du monorail, il faut aussi du devers pour combattre la tendance au cheminement latéral, mais d'autres nécessités interviennent, et l'on peut imposer que le rapport $\frac{V^2}{R}$ soit inversement proportionnel aux dimensions linéaires des véhicules, de manière à ce qu'il en soit de même pour φ_0.

Cela étant admis, l'amplitude des inclinaisons Φ variera sensiblement comme λ^{-1}, l'angle Ψ des excursions des gyro-

stats, ainsi que le coefficient χ, seront les mêmes dans des appareils semblables, et l'équation

$$J\Omega \sin \Psi = \chi\Phi \sqrt{PLI} \qquad (117)$$

nous conduit à la relation

$$r^5\Omega \rightarrow \lambda^{\frac{7}{2}}.$$

Ainsi que nous l'avons déjà dit au n° 74, c'est la vitesse périphérique proportionnelle à $r\Omega$ qui doit être constante pour des volants géométriquement semblables; en tenant compte de cette remarque nous sommes conduits à:

$$r^4 \rightarrow \lambda^{\frac{7}{2}}.$$

$$r^3 \rightarrow \lambda^{\frac{21}{8}} < \lambda^3. \qquad (119)$$

En passant d'un appareil à un autre plus grand, le poids du gyrostat, proportionnel à r^3, augmente donc moins vite que le poids du véhicule ; les difficultés d'établissement seront donc relativement moindres pour les grandes installations que pour les petites.

Ce qui semble confirmer cette prévision théorique, c'est qu'après avoir établi son modèle pesant 145 kilos, M. Brennan a pu construire avec succès un wagon expérimental de plusieurs tonnes.

78. Application a la stabilisation des aéroplanes. — Le problème de la stabilisation d'un aéroplane se ramène pratiquement à cette double question : limiter et rendre automatiquement décroissants les changements d'orientation parasites dans le plan transversal et surtout dans le plan longitudinal.

Pour ce qui concerne la stabilité longitudinale, on peut dire qu'elle existe par la disposition même d'un aéroplane bien établi, l'avion, comme le navire, possédant une courbe métacentrique (*) ; malheureusement, la forme de cette courbe n'est guère connue, et l'on ne peut considérer la

(*) *Notes sur le Problème de l'Aéroplane*, 1908, Paris (Béranger).

stabilité naturelle comme effective qu'à l'égard des petits mouvements.

Quant à la stabilité transversale, elle est encore plus précaire, mais, par contre, une défaillance dans l'orientation latérale n'entraîne pas les conséquences d'un piquage vers le sol ou d'une cabrade.

En résumé, dans les conditions atmosphériques autres que le calme absolu, la stabilité doit être augmentée ; actuellement, ce résultat est atteint par des manœuvres de gouvernails, d'ailerons, de gauchissement, etc., et l'on peut dire que c'est dans l'habileté de son pilote que réside surtout la stabilité d'un aéroplane.

Nous avons vu au n° 63 la tentative faite par Regnard, pour substituer aux réflexes de l'aviateur un « instinct artificiel », par l'emploi d'un gyrostat à action indirecte. Voyons comment se pose le problème si l'on veut utiliser un stabilisateur gyrostatique agissant directement.

Considérons un gyrostat libre d'osciller autour de deux tourillons alignés perpendiculairement à l'axe de sa rotation propre et supposons que l'axe de tourillonnement soit dirigé dans le sens de la marche de l'aéroplane.

Si l'appareil s'incline pour se cabrer ou piquer vers le sol, le gyrostat prendra un mouvement de précession transversal ; l'aéroplane étant normalement stable dans le sens longitudinal, on pourrait amortir son tangage en freinant les oscillations de précession (théorème IV, n° 68) ; ce serait l'imitation du procédé Schlick. En tout cas, il faudrait établir deux gyrostats tournant et précessionnant en sens opposés, car les remarques de Skütsch (n° 74, note) prennent ici toute leur importance.

Si l'on voulait traiter de la même manière les oscillations transversales, il conviendrait d'établir un second système analogue.

Un point qui méritera toute l'attention des inventeurs est la nécessité d'empêcher l'intervention intempestive des stabilisateurs pendant les passages d'un état de régime à un autre; par exemple, d'un vol horizontal à un vol descendant et réciproquement. D'autre part, ne connaissant pas la grandeur des efforts que devrait combattre un tel système, il

est très difficile de se faire une idée de ses dimensions et de son poids.

Ces quelques indications donnent une idée des difficultés à vaincre pour stabiliser un aéroplane par l'action directe des réactions gyrostatiques. Nous ignorons si des essais ont été tentés dans cette direction; aucun résultat, en tout cas, ne paraît avoir été publié.

Il convient de citer ici les expériences du capitaine Lucas-Girardville (*94*), dont le dispositif tient à la fois de l'action indirecte, en ce sens qu'il utilise des ailerons latéraux, et de l'action directe, puisque c'est le gyrostat lui-même qui exerce les efforts nécessaires à leur commande. Les gyrostats sont disposés comme nous venons de l'indiquer, l'axe des tourillons est dirigé dans le sens de la marche ; toute inclinaison longitudinale de l'appareil produit un couple de réaction gyrostatique qui est transmis à la commande des ailerons ; les résultats obtenus jusqu'ici sont encourageants.

Il est possible que la résistance à vaincre pour mettre en action les stabilisateurs joue, dans une certaine mesure, le rôle de frein et qu'une action directe s'ajoute ainsi à l'effet des ailerons.



BIBLIOGRAPHIE

1. D'ALEMBERT. Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la terre. Paris, 1749. (Première mise en équation du problème d'un corps solide libre.)

2. EULER donne aux équations différentielles du mouvement d'un solide autour d'un point fixe leur forme définitive et trouve des intégrales rigoureuses pour le cas où les forces extérieures sont nulles, dans quatre mémoires publiés dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1749, p. 289; 1750, p. 185; 1758, p. 154; 1760, p. 176.

3. J. SHORT. An account of an horizontal Top invented by Mr Serson. *Phil. Trans. London*, 1751-52, t. XLVII, p. 352.

4. POISSON. Mémoire sur un cas particulier de la rotation des corps pesants. *Journal de l'École Polytechnique*, Paris, 1815, 16e cahier, p. 247.

5. POINSOT. Théorie nouvelle de la rotation des corps. *Journal de Liouville*, t. XVI, p. 9, 1851 (résumé dans *Comptes-Rendus Acad. Sc.* Paris, 19 mai 1834).

6. IDEM. Théorie des cônes circulaires roulants. *Journal de Liouville*, t. XVIII, p. 41, 1853.

7. IDEM. Mémoire sur la précession des équinoxes. *Addition à la Connaissance des Temps*, p. 5, 1858.

8. BRIOT. Thèse sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. *Journal de Liouville*, t. VII, p. 70, 1842.

9. ARCH. SMITH. Note on the theory of the spinning top. *Cambridge Mathematical Journal*, t. I, p. 47, 1846.

10. FINCK. Note sur la toupie. *Nouvelles Annales*, Paris, t. IX, p. 310, 1850.

11. LÉON FOUCAULT. Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la terre fondée sur la fixité du plan de rotation. *Comptes-Rendus*, Paris, 1852, t. XXXV, p. 421.

12. IDEM. Sur les phénomènes d'orientation des corps tournants entraînés par un axe fixe à la surface de la terre. *Ibidem*, p. 424.

13. IDEM. Addition aux précédentes communications. *Ibidem*, p. 469.

14. IDEM. Sur la tendance des rotations au parallélisme. *Ibidem*, p. 602.

15. Recueil des travaux scientifiques de Léon Foucault (réunis par GARIEL et BERTRAND). Paris, 1878.

16. PERSON. L'appareil de Bohnenberger pour la précession des équinoxes peut servir à constater la rotation de la terre, etc., *C.-R.*, Paris, t. XXXV, 1852, p. 417 et 549.

17. IDEM. Note sur le mouvement de rotation. *Ibidem*, p. 753.

18. QUET. Recherches mathématiques faites à l'occasion des expériences de Foucault. *C.-R.*, Paris, t. XXXV, 1852, pp. 602, 686, 688 et 732.

19. IDEM. Des mouvements relatifs en général et spécialement des mouvements relatifs sur la terre. *Journal de Liouville*, Paris, 1853, t. XVIII, p 213.

20. PLÜCKER. Ueber die Fessel'sche Rotations Maschine. *Annalen der Phys. und Chem.* (Poggendorf), t. XC, 1853, p. 174.

21. POGGENDORF. Noch ein wort uber die Fessel'sche Rotations Maschine. *Ibidem*, t. XC, 1853, p. 348.

22. YVON VILLARCEAU. Théorie analytique du gyroscope de M. L. Foucault. *Nouvelles Annales*, Paris, t. XIV, 1855, pp. 343 et 449.

23. IDEM. Etude sur le mouvement des meules horizontales de moulins à blé et méthodes pour les équilibrer. *Journal de Liouville*, 1871, 2e série, t. XV, p. 315.

24. SIRE. Sur la tendance des axes de rotation au parallélisme et son application à la démonstration expérimentale de la rotation terrestre. *Archives des Sc. Phys. et Nat.*, Genève, 1858, t. I, p. 105.

25. RESAL. Note sur une question du mouvement relatif et sur l'appareil pendulaire de M. Sire. *Annales des Mines*, Paris, 1859, t. XV, p. 555.

26. IDEM. *Traité de Cinématique pure*, Paris, 1862, p. 360 à 375.

27. BOUR. Mémoire sur les mouvements relatifs. *Journal de Liouville*, Paris, 1863, p. 1, et *Cours de Mécanique*, Paris, 1863, t. III.

28. SYLVESTER. On the motion of a rigid body acted on by no external forces. *Phil. Trans.*, London, 1866, t. CLVI, p. 757.

29. PARIS. Description et usage du trace-vague et du trace-roulis. *Rev. Maritime et Coloniale*. Paris, 1867, t. XX, p. 273, et *C.-R.*, t. LXIV, p. 731.

30. HIRN. Théorie analytique élémentaire du gyroscope. *Annales de l'Observatoire de Paris*, 1868, t. IX, p. 125.

31. FERRES. Note on prof. Sylvesters representation of the motion of a free rigid body by means of a material ellipsoid. *Phil. Trans.*, London, 1870, t. CLX, p 1.

32. JOUFFRET. Théorie élémentaire du mouvement du gyroscope, de la toupie et du projectile oblong. *Revue d'Artillerie*, Paris, 1874, t. IV, pp. 245 et 547.

33. W. THOMSON (Lord KELVIN) Vibrations and Waves in a stretched uniform chain of symetrical gyrostats. *Proc. London Math. Soc.*, 1874-75, t. VI, p. 190.

34. Idem. Gyrostats. On the precessionnal motion of a liquid. *Nature*, London, 1877, t. XV, p. 297.

35. Idem. Gyrostatic model of a magnetic compass. *Nature*, London, 1884, t. XXX, p. 524.

36. W. Thomson et Tait. *Treatise on natural philosophy*. Cambridge, 1883, t. I.

37. Gilbert. Etude historique et critique du problème de la rotation d'un corps solide. *Annales de la Soc. Scientifique de Bruxelles*, 1877-78, t. II, p. 255.

38. Idem. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes du mouvement relatif. *Ibid.*, 1881, t. VI, p. 180.

39. Idem. Sur divers problèmes du mouvement relatif. *C.-R.*, Paris, 1882, t. XCIV, p. 197.

40. Gruey. Sur un nouvel appareil gyroscopique. *C.-R.*, Paris, 1878, t. LXXXVII, p. 395.

41. Idem. Sur un tourniquet gyroscopique alternatif. *Ibid.*, p. 775.

42. Idem. Sur la toupie de Foucault transformée en pendule gyroscopique *Ibid.*, 1879, t. LXXXVIII, p. 328.

43. Idem. *Théorie élémentaire des gyroscopes*. Clermont-Ferrant, Thiebault, édit., 1879.

44. Massau. *Cours de Mécanique rationnelle* (autographie). Gand, 1882.

45. Stoffaes. Sur la tendance au parallélisme des axes de rotation. *Ann. Soc. Scientifique de Bruxelles*, 1883-84, t. VIII, p. 121.

46. Ed. Dubois. Sur le gyroscope marin, *C.-R.*, Paris, 1884, t. XCVIII, p. 227.

47. Darboux. Mouvement d'un corps pesant de révolution. *Journal de Liouville*, Paris, 1885, t. I, série IV.

48. De Jonquières. Théorie élémentaire d'après les méthodes de Poinsot du mouvement de la toupie et de son application à un horizon artificiel *Revue Maritime et Coloniale*, Paris, 1886, t. XCI, p. 433.

49. G. Fleurias. Gyroscope collimateur. Substitution d'un repère artificiel à l'horizon de la mer. *Rev. Marit. et Col.*, Paris, 1886, t. XCI, p. 452.

50. Idem. Horizon gyroscopique. *Rev. Marit. et Col.*, Paris, 1892, t. CXII, p. 5.

51. de Saint-Germain. *Résumé de la théorie du mouvement d'un solide autour d'un point fixe*. Paris, Gauthier-Villars, 1887.

52. Guyou. Sur une solution élémentaire du problème du gyroscope de Foucault. *Comptes-Rendus*, Paris, 1888, p. 1148.

53. J. Perry. *Spinning Tops*. Londres, 1890.

54. Idem. The use of gyrostats. *Nature*, Londres, 1908, t. LXXVII, p. 447.

55. Koenigs. Sur deux appareils nouveaux de mécanique. *Revue Générale des Sciences*, Paris, 1891, p. 241.

56. A. BAULE. Note sur la toupie du commandant Fleurias. *Rev. Maritime et Coloniale*. Paris, 1890, t. CV, p. 516.

57. DE SPARRE. *Sur le mouvement des projectiles dans l'air*. Paris, Gauthier-Villars, 1891.

58. IDEM. *Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité*. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

59. H. CHIPART. *La Théorie gyrostatique de la lumière*. Paris, Gauthier-Villars, 1894.

60. CARVALLO. Théorie du mouvement du motocycle et de la bicyclette. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Paris, 1900 et 1901, cahiers V et VI.

61. A. G. GREENHILL On pseudo-elliptic integrals and their dynamical application. *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XXVI, 1895, et XXVII, 1896.

62. IDEM. Gyroscope and Gyrostat. Article de *Encyclopaedia Britannica*, suppl., 1902.

63. DEWAR. Algebraical gyrostat curves. *Engineering*, Londres, 1896, II, p. 92.

64. IDEM. Stereoscopic representation of the motion of a top. *Engineering*, Londres, 1897, I, p. 310.

65. G. DUCHESNE. Théorie expérimentale du gyroscope. *Rev. Univ. des Mines*, Liége, 1897, t. XXXVIII, p. 249.

66. F. KLEIN. On the stability of the sleeping top. Traduction dans *Nouvelles Ann. de Math.*, Paris, 1897, p. 323.

67. KLEIN UND SOMMERFELD. Ueber die Theorie des Kreisels, Leipzig, Teubner, 1897-1910.

68. Gyroscopic action and the loss of the Cobra. Polémique dans *Engineering*, Londres 1901, II, pp. 481, 528, 551, 588, 589, 623, 624, 625, 647, 680, 719, 752, 753, 783, 813, 814, 847.

69. WITTFELD. Ueber Schnellbahnen und elektrische Zugforderung auf Hauptbahnen. *Glasers Annalen*, 1902, t. V. p. 86.

70. O. SCHLICK. On the gyroscopic effects of flywheels on board ships. *Trans. of the Institution of Naval Architects*, 1904, Vol. XLVI.

71. IDEM. Der Schiffskreisel, *Jahrbuch der Schiffbau technischen Gesellschaft*, 1909, Bd. X, p. 111.

72. LORENZ. Die Wirkung eines Kreisels auf die Rollbewegung von Schiffen. *Physikalischen Zeitschrift*, 1904, Jh. V. p. 27.

73. A. FÖPPL. Die Theorie des Schlickschen Schiffskreisel. *Zeitschr. des Ver. Deut. Ing.*, 1904, Bd. XLVIII, p. 478.

74. IDEM. Ueber einen Kreiselversuch zur Messung der Umdrehungs geschwindigkeit der Erde. *Physikalische Zeitschrift*, 1904, Jh.V. p. 416.

75. IDEM. Vorlesungen über die technische Mechanik. Leipzig, 1910, Bd. VI.

76. WILLIAM H. WHITE. Experiments with D[r] Schlicks gyroscopic apparatus for steadying ships. *Trans. Institution of Naval Architects*, 1907.

77. SKÜTSCH. Vortrag uber den Schlickschen Schiffskreisel und eine Vervollkommung desselben. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 1908, p. 464.

78. CHARBONNIER. *Balistique extérieure rationnelle.* Problèmes secondaires. Paris, 1907.

79. KRILOFF. Notice sur la théorie du gyroscope amortisseur du roulis de M. le D[r] O. Schlick. *Bull. Association technique maritime*, Paris, 1909, t. XX, p. 108.

80. BRENNAN. Monorail Railway. (Descriptions sommaires d'après les dessins annexés aux brevets.) *Engineering*, 1907, I, pp. 623, 749; 1910, I, p. 289.

81. SCHILOWSKI. Monorail system. *Engineering*, 1910, I, p. 609.

82. Monorail Scherl (descriptions sommaires). *Scientific American*, 22 janvier 1910; *Zeitschr. des Ver. Deut. Ing.*, 1910, Bd. LIV, p. 1738.

83. O. MARTIENSSEN. Die Verwendbarkeit des Rotationskompasses als Ersatz des magnetischen Kompasses. *Physikalische Zeitschrift*, 1906, Jh. VII, p. 535.

84. D[r] ANSCHUTZ-KAEMPFE. Der Kreisel als Richtungswesen auf der Erde mit besonderer Berucksichtigung seiner Verwendbarkeit auf Schiffe. *Jahrbüch der Schiffbautechnischen Gesellschaft*, 1909, p. 352.

85. M. SCHULER. Mathematischer Anhang zu den Vortrag von D[r] Anschutz-Kaempfe. *Ibid.*, p. 561.

86. ASTIER. Etude sur le phénomène gyroscopique. *Revue de Mécanique*, Paris, 1909, p. 142.

87. CRABTREE. An elementary treatment of the theory of spinning tops and gyrosopic motion. Londres, 1909.

88. L. ROOSENBURG. Beschrijving en onderzoek van den gyroscopischen horizon Fleurias. *Kon. Ned. Meteorologisch Instituut*, Utrecht, 1909, n[r] 102.

89. L. FAVÉ. Horizon gyroscopique de l'amiral Fleurias. Modèle de MM. Ponthus et Therrode. *Revue Maritime et Coloniale*, Paris, 1910, t. CLXXXIV, p. 5.

90. DRUCKER. De gyroscoop en het monorailspoorwegsysteem. *De Ingenieur*, 1910, p. 959.

91. FUCHS und KATZMAYR. Eine neue Theorie des Kreisels und seine Anvendung in der Technick. *Zeitschrift des Vereines Deutcher Ingenieure*, 1910, p. 1522.

92. P. REGNARD. Stabilisation automatique des aéroplanes. Commande auto-

matique par gyroscopes et contacts électriques des organes stabilisateurs. *Comptes-Rendus*, Paris, 1910, t. CL, p. 829, et ***Aérophile***, 1910, p. 204.

93. ANSPACH. Axes de rotation et centres de percussion. ***Bull. Techn. de l'Ass. des Ing. sortis de l'Ecole polytech. de Bruxelles***, 1911, p. 185.

94. LUCAS GIRARDVILLE. Sur la stabilisation des aéroplanes au moyen de gyroscopes. *Comptes-Rendus*, Paris, 1911, t. CLII, p. 127, et ***Aérophile***, 1911, p. 84.

95. The Sperry gyro-compass. *Engineering*, 1912, I, p. 722.

TABLE DES MATIÈRES

III. — Applications immédiates de l'effet gyrostatique.

CHAPITRE III

Les principaux etats de sollicitation des gyrostats

I. — Problème du premier genre. — Gyrostat mobile autour d'un point de son axe et soumis à une force de direction constante.

II. — Problème du deuxième genre. — Gyrostat en contact avec une surface fixe. — Toupies diverses.

III. — Problème du troisième genre. — Gyrostat entièrement libre, dans le vide ou dans un milieu résistant.